В.С. ВЫСОЦКИЙ

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ

НАУЧНЫЙ МИР

В.С. ВЫСОЦКИЙ

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ ПРИ ПОДГОТОВКЕ К ЕГЭ

МОСКВА
Научный мир
2011

УДК 373:51
ББК 22.1
В 93

Высоцкий В. С.
В 93 **Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ.**
- М.: Научный мир, 2011. - 316 с.: 262 ил.

ISBN 978-5-91522-257-0

Книга посвящена решению задач с параметрами, которые для многих школьников традиционно являются задачами повышенной трудности. Задачи классифицированы как по типам, так и по методам решений, начиная от простейших задач до трудных, встречающихся на олимпиадах, ЕГЭ и вступительных экзаменах в МГУ.

Для учащихся 8-11 классов, учителей школ, гимназий, лицеев, слушателей подготовительных курсов.

УДК 373:51
ББК 22.1

ISBN 978-5-91522-257-0

ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение

Еще совсем недавно, каких-то 10–15 лет назад, задачи с параметрами встречались на вступительных экзаменах в вузах с самым высоким уровнем математики. Сейчас это уже элемент единого государственного экзамена. Хотя на ЕГЭ встречается всего одна-две задачи с параметрами, но те школьники, которые хотят получить высший балл по ЕГЭ, должны уметь их решать.

Отметим также, что многие вузы проводят собственные олимпиады по математике, результаты которых учитываются при поступлении и которые также включают задачи с параметрами. По задачам с параметрами уже вышел ряд книг и пособий. Но большинство из них предполагают наличие у школьника высокой математической культуры, а также значительного объема математических фактов, которые в школе изучаются весьма поверхностно или совсем не изучаются. Поэтому школьникам обычных школ зачастую эти книги недоступны для понимания. Разобраться в них могут только школьники продвинутых математических классов.

Мне хотелось написать книгу по задачам с параметрами, которую в состоянии освоить школьник обычной школы, разумеется, при желании и затрате достаточного количества сил и времени. Поэтому:

1. Все математические факты, которые в школе почти не изучаются, но необходимые для решения задач с параметрами, подробно излагаются в тексте книги. В первую очередь это построение множеств точек на плоскости, построение графиков с модулями, монотонность функций, методы решения нелинейных систем уравнений и т. д.
2. В каждой главе книги разбираются 15–25 задач, посвященных определенной теме, которые охватывают практически все вопросы, касающиеся данной темы. При этом первые задачи каждой главы разбираются очень подробно, чтобы отчетливо были видны методы их решений и идеи, на которых они построены.
3. Задачи, в которых наибольшие трудности – логические, разбираются сначала на конкретных числовых примерах и лишь затем дается решение в общем виде.

Такой подход дает возможность школьнику самостоятельно освоить различные методы решения задач с параметрами.

Книга включает в себя 9 глав. В первой главе объясняется, что такое параметр и что значит решить задачу с параметрами, а также в какой форме могут быть даны ответы к этим задачам.

Главы 2–4 посвящены линейным и квадратным уравнениям и неравенствам с параметрами. Это одни из основных глав книги, поскольку большинство задач с параметрами в школьном курсе так или иначе сводятся к исследованию линейных и квадратных уравнений и неравенств. Глава 5 посвящена уравнениям и неравенствам, заменой переменной сводящихся к квадратным.

В главе 6 рассмотрены графические методы решения задач с параметрами. Значительное число разобранных примеров показывает, как использование графиков позволяет упростить решение, сделать его наглядным, отбросить рассмотрение ненужных случаев. Главы 7 и 8 посвящены исследованию линейных и нелинейных систем уравнений. И, наконец, в 9-ой главе разбираются задачи, предлагавшиеся как на самом едином государственном экзамене, так и при подготовке к нему.

В конце каждой главы даются задачи для самостоятельного решения. Они разбиты на две части. В первой части предлагаются стандартные для данной темы задачи, во второй части – более трудные. Большинство из них снабжены указаниями и решениями.

Отметим также, что очень часто различные методы и приемы исследования уравнений и неравенств с параметрами разбираются в книге на одном и том же квадратном трехчлене. Это нисколько не уменьшает общности изложения материала, но дает возможность школьнику не следить каждый раз за вычислительными деталями, а сосредоточиться непосредственно на логической стороне вопроса исследования задач с параметрами.

За исключением глав 5 и 9 книга доступна школьникам, начиная с 8–9 классов. (В главах 5 и 9 требуется знание материала, который в школьном курсе изучается в 10 и 11 классах). Эти главы без ущерба для понимания остального материала можно пропустить и вернуться к ним, когда в школе будет пройден соответствующий материал. Следует отметить, что некоторые разделы задач с параметрами, например, иррациональные и логарифмические уравнения и неравенства, координатно-параметрический метод и некоторые другие темы, в этой части книги не рассмотрены. Они будут рассмотрены во второй части этой книги.

В заключение автор приносит самую искреннюю благодарность Громыко В.И., Трифонову Н.П., Фридман М.Н. за ценные советы и замечания, направленные на улучшение книги и подготовку книги к печати.

Все отзывы и пожелания, касающиеся данной книги, просьба направлять по адресу: vsvic@mail.ru/.

Автор

Глава 1

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ

§ 1. ЧТО ТАКОЕ ПАРАМЕТР

Как это ни покажется странным, задачи с параметрами мы решаем чуть ли не ежедневно, при этом в большинстве своем не зная, что такое параметр. Например, придя в магазин покупать какой-либо товар, мы смотрим на его цену. Если цена будет очень высокой, мы не купим его. Если цена будет вполне приемлемой, мы принимаем решение купить товар. Но если цена товара резко уменьшилась (например, в результате распродажи), мы можем купить несколько единиц этого товара. Таким образом, если рассматривать цену товара как параметр, то от значений этого параметра будет зависеть, купим или не купим мы этот товар, а если и купим, то сколько единиц.

Та же самая картина имеет место и в математике при решении уравнений. При одних значениях коэффициентов уравнение может вообще не иметь решений, при других – одно решение, при третьих – бесконечно много решений. Например, в школьном курсе алгебры мы часто встречались с ситуацией, когда квадратное уравнение в зависимости от значений коэффициентов имело два решения, одно решение или не имело решений вовсе.

Рассмотрим эти вопросы более подробно. В уравнениях

1) $2x = 5$, 2) $3x^2 - 4x + 1 = 0$, 3) $\sqrt{3x+1} = x-1$

все коэффициенты при x – конкретные числа. Поэтому, решив их, в качестве решений получим тоже конкретные числа. Например в первом уравнении решением будет $x = \frac{5}{2}$, во втором – $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1}{3}$, в третьем – $x = 5$. Никаких параметров в этих уравнениях нет.

Рассмотрим теперь уравнения

$(a-2)x = 2a + 5$, $(2a-1)x^2 + 3ax + 5a - 1 = 0$, $\sqrt{ax - 3a + 1} = a - x$.

В этих уравнениях, в отличие от предыдущих, конкретные значения коэффициентов при x и свободные члены неизвестны, они зависят от a. При различных значениях a – они разные. И решения всех этих уравнений при изменении значений a будут различными. Вот эта переменная величина a, от которой зависят коэффициенты уравнения, и называется *параметром*.

В общем виде: если в уравнении (неравенстве) коэффициенты при неизвестных величинах зависят от некоторой переменной или нескольких переменных, то эта переменная или переменные называются параметрами.

§ 2. РАЗЛИЧНЫЕ ФОРМУЛИРОВКИ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРАМИ

На конкретных примерах мы разберем наиболее часто встречающиеся формулировки задач с параметрами и выясним, что значит решить задачу с параметрами.

Задача 1. При всех значениях параметра a решить уравнение

$$(a^2-9)x=5(a+3). \tag{1}$$

Решение этой задачи будет дано в гл. 2 (задача 2). Сейчас же мы остановимся на логической стороне вопроса, поставленного в задаче. Как понимать фразу - решить уравнение при всех a? Некоторые школьники считают, что надо взять и подставить какое-то конкретное значение a и решить полученное уравнение. Найденные корни и будут ответом. Конечно же, это не так. Ведь в этом случае мы решим уравнение только для фиксированного значения a, а надо – для всех a.

Рассмотрим уравнение (1) более подробно. При каждом значении a уравнение (1) имеет свой конкретный вид. Например, при $a=0$ уравнение (1) принимает вид $-9x=15$. Решением этого уравнения будет $x=-\frac{5}{3}$. При $a=1$ уравнение примет вид $-8x=20$. Его решением будет $x=-2.5$. При $a=3$ уравнение (1) примет вид $0\cdot x=30$, которое, очевидно, решений не имеет.

«Подставляя» и дальше вместо a «все» действительные числа (представим этот процесс мысленно - ясно, что реально подставить бесконечное число значений a невозможно), получим бесконечное число уравнений, каждое из которых имеет свое решение или не имеет решений вовсе. Таким образом, уравнение (1) представляет собой бесконечное семейство уравнений (при каждом a свое уравнение).

Все эти уравнения было бы желательно «выписать», решить, и при каждом a полученные корни записать в ответ. Но, понятно, что мы это сделать не можем. Как же в таком случае быть, как записать бесконечное число решений уравнения? Ответ следующий: решения уравнения записываются в виде некоторой формулы, зависящей от a, которая при каждом a дает решения соответствующего уравнения. Иногда это не одна, а две или три формулы: при одних a первая формула задает решения, при других a – вторая, при третьих a – третья.

Например, как мы увидим в гл. 2 (задача 2), решения уравнения (1) записываются так:

при $a \neq 3$ и $a \neq -3$ решением является $x = \dfrac{5}{a-3}$;
при $a = 3$ решений нет;
при $a = -3$ решениями являются $x \in R$.

В этом ответе формула $x = \dfrac{5}{a-3}$ дает решения уравнения (1) при всех a, кроме $a = 3$ и $a = -3$. При $a = 3$ и $a = -3$ решения выписаны отдельно. Таким образом, при каждом значении a указано, что будет решением уравнения (1). То есть мы решили его при всех a.

Еще один пример.

Задача 2. При всех a решить уравнение

$$|2x+8| + |2x-6| = a. \qquad (2)$$

Решение этого уравнения будет рассмотрено нами в гл. 6 (задача 12). Сейчас же проанализируем только ответ этой задачи, т. е. как задаются решения этого уравнения при всех значениях a.

Ответ:

при $a > 14$ уравнение имеет два решения $x_1 = \dfrac{-a-2}{4}$ и $x_2 = \dfrac{a-2}{4}$;
при $a = 14$ решениями являются все $x \in [-4;\ 3]$;
при $a < 14$ решений нет.

И в этом уравнении при каждом $a \in R$ мы указали, какие корни будет иметь наше уравнение. Это и означает, что мы решили уравнение при всех a.

Кроме задач о решении уравнений с параметрами очень часто встречаются, непосредственно с ними связанные, задачи о числе решений уравнений. Сформулируем одну из них для уравнения (2).

Задача 3. При всех a определить число решений уравнения

$$|2x+8| + |2x-6| = a.$$

Задача 3 является «урезанной» задачей 2. В задаче 2 надо было определить не только число решений при разных a, но и найти сами решения уравнения (2). В задаче 3 надо определить лишь число решений; т. е. определить, при каких a уравнение не имеет решений, при каких a имеет одно решение, при каких a – два решения, и т. д. Часто последняя задача еще более «урезается».

Задача 4. Найти все a, при которых уравнение (2) имеет два решения.

Ответом последней задачи будут только те a, при которых уравнение (2) имеет ровно два решения.

Еще один цикл задач - это задачи, в которых надо найти значения параметров, при которых корни уравнения удовлетворяют некоторым условиям или соотношениям. Например, все корни больше некоторого фиксированного числа или сумма квадратов корней равна заданному числу и т. п.

Задача 5. Найти все значения параметра a, при которых оба корня уравнения $x^2-2(a+1)x+9a-5=0$ больше 5.

Задачи 1–5 – типичные задачи для уравнений с параметрами. Конечно, кроме рассмотренных, существуют и другие формулировки задач с параметрами. Но наша цель здесь не формулировка всех типов задач, а на основных из них объяснить школьнику логику этих задач и методы их решения.

Аналогичные задачи легко могут быть сформулированы и для неравенств.

В заключение сделаем два замечания, важные для дальнейшего.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Задача 1. На перемене Вася и Коля обращаются к отличнице Оле. Коля говорит: «Оля, нам надо было при всех a решить три уравнения с параметрами. Первые два уравнения решил Вася и получил такие ответы. В первом:

при $a\le -2$ уравнение имеет одно решение $x=5-a$;
при $-2<a\le 4$ решений нет;
при $a\ge 8$ уравнение имеет два решения $x_1=5-a$ и $x_2=5+a$.

Во втором уравнении он получил ответ:

при $a\in(-\infty;-7)$ решений нет;
при $a\in[-7;8]$ уравнение имеет одно решение $x=\dfrac{2a+6+\sqrt{a+7}}{2}$;
при $a\in[1;+\infty)$ уравнение имеет одно решение $x=\dfrac{2a+6-\sqrt{a+7}}{2}$.

Третью задачу решал я и получил такой ответ:

при $a < 4$ решений нет;

при $a = 4$ уравнение имеет одно решение $x = 1$;

при $4 \le a \le 8$ уравнение имеет одно решение $x = \dfrac{2a-6+\sqrt{a-4}}{2}$;

при $a \ge 8$ решения $x_1 = \dfrac{4a-2-\sqrt{2a-16}}{5}$ и $x_2 = \dfrac{4a-2+\sqrt{2a-16}}{5}$.

Посмотри, пожалуйста, наши решения и ответы».

Оля посмотрела сначала ответы и сказала: «В первых двух задачах ответы в принципе неверные. Поэтому не имеет смысла смотреть решения. А в третьей задаче такой ответ, вообще говоря, может быть. Поэтому необходимо посмотреть весь ход решения, чтобы убедиться, что все решено верно». «Как же так, - недоумевает Вася, - Оля, посмотри, в пункте 2 ответа последней задачи Коля получил при $a = 4$ корень $x = 1$, а в пункте 3 при $a = 4$, $x = \dfrac{2a-6+\sqrt{a-4}}{2}$. Кроме этого, пункт 3 показывает при $a = 8$ у него одно решение. А пункт 4 говорит, что при $a = 8$ – два решения?!». «Тем не менее, - говорит Оля, - никаких противоречий у него нет. Посмотри внимательнее!»

Как рассуждала Оля, дав такие оценки всем трем ответам Васи и Коли?

Глава 2

ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

§ 1. ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Самыми простыми уравнениями с параметрами являются линейные уравнения с одним неизвестным. Это уравнения вида

$$ax = b\,, \tag{1}$$

где a и b – некоторые числа. Число a называется коэффициентом, b – свободным членом уравнения (1).

Основные задачи, которые мы будем решать применительно к уравнению (1), являются стандартными для всех уравнений с параметрами: 1) при каких a и b уравнение (1) имеет решения; 2) определить число решений при разных a и b; 3) найти эти решения; 4) выяснить, при каких a и b уравнение (1) не имеет решений.

Рассмотрим примеры.

Задача 1. При всех a решить уравнение

$$(2a-4)x = 3a+1\,. \tag{2}$$

Неправильно было бы сразу разделить обе части уравнения на $2a-4$ и написать ответ «При всех a, $x = \frac{3a+1}{2a-4}$».

Дело в том, что коэффициент $2a-4$ может обращаться в нуль (при $a=2$), следовательно, выражение $x = \frac{3a+1}{2a-4}$ при $a=2$ теряет смысл. Поэтому необходимо рассмотреть отдельно два случая, когда $2a-4=0$ и когда $2a-4 \neq 0$.

Решение.

Случай I. $2a-4=0$, т. е. $a=2$. Подставляя $a=2$ в уравнение (2), получаем $0 \cdot x = 7$. Очевидно, что последнее уравнение решений не имеет, т. к. ни при каком x не выполняется равенство $0 \cdot x = 7$.

Случай II. $2a-4 \neq 0$, т. е. $a \neq 2$. Тогда из (2) следует, что решением будет $x = \frac{3a+1}{2a-4}$.

Ответ:
- при $a=2$ уравнение решений не имеет;
- при $a \neq 2$ уравнение имеет одно решение $x = \frac{3a+1}{2a-4}$.

Итак, нами получены решения уравнения (2) при каждом значении a: при всех $a \neq 2$ уравнение имеет одно решение $x = \frac{3a+1}{2a-4}$; при $a = 2$ – решений нет.

Задача 2. При всех a решить уравнение

$$a^2x - 5a = 9x - 15\ . \qquad (3)$$

Решение. Перенесем все члены, содержащие x, в левую часть, а не содержащие – в правую. Имеем

$$a^2x - 9x = 5(a-3) \qquad \text{или} \qquad (a^2 - 9)x = 5(a-3)\ . \qquad (4)$$

Теперь очевидно, исходное уравнение – линейное. Так же, как и в задаче 1, мы не можем сразу разделить обе части уравнения на $a^2 - 9$ и сказать, что $x = \frac{5(a-3)}{a^2-9} = \frac{5}{a+3}$ есть корень уравнения (4) при всех a. Дело в том, что когда $a = 3$ или $a = -3$, выражение $x = \frac{5(a-3)}{a^2-9}$ не имеет смысла. Поэтому, необходимо отдельно рассмотреть случай, когда $a^2 - 9 = 0$.

Случай I. $a^2 - 9 = 0$, т. е. $a = 3$ или $a = -3$.

А) При $a = 3$ уравнение (4) принимает вид $0 \cdot x = 0$. Это уравнение имеет решениями все действительные числа.

В) При $a = -3$ уравнение (4) имеет вид $0 \cdot x = -6$, которое, очевидно, решений не имеет.

Случай II. $a^2 - 9 \neq 0$, т. е. $a \neq 3$ и $a \neq -3$. Тогда из уравнения (4) получаем $x = \frac{5(a-3)}{a^2-9} = \frac{5}{a+3}$.

Ответ:
- при $a = -3$ решений нет;
- при $a = 3$ решениями являются все $x \in R$;
- при $a \neq -3$ и $a \neq 3$ уравнение имеет одно решение $x = \frac{5}{a+3}$.

В контексте только что решенных уравнений рассмотрим более подробно один достаточно тонкий вопрос.

Часть школьников, видя равенства $0 \cdot x = 0$, $0 \cdot x = 7$, $2x + 1 = 2x + 1$ (некоторые из них нам уже встречались), говорят, что это не уравнения, а верные (или неверные) числовые равенства или тождества $0 = 0$, $0 = 7$ или $2x + 1 = 2x + 1$.

Возникает естественный вопрос: в чем различие между тождеством и уравнением? Ответ следующий: формальных различий (по внешнему виду) нет. Все зависит только от постановки задачи. Если мы ставим вопрос: найти все значения x, при которых верно равенство

$$2x + 1 = 2x + 1\ , \tag{5}$$

то тем самым мы рассматриваем (5) как уравнение, для которого надо найти его решения. Если же мы хотим показать, что при всех x верно равенство (5), то тем самым мы рассматриваем (5) как тождество.

Из предыдущего становится понятно, что верное числовое равенство $7 = 7$ можно рассматривать и как уравнение

$$0{\cdot}x + 7 = 7\ ,$$

решениями которого будут все действительные числа. Просто член $0{\cdot}x$ в равенстве $7 = 7$ не написан!

Аналогично, неверное числовое равенство $5 = 7$ можно также рассматривать как уравнение

$$0{\cdot}x + 5 = 7\ ,$$

которое, очевидно, решений не имеет.

Исследуем теперь линейное уравнение в общем виде.

Задача 3. При всех значениях a и b решить уравнение

$$a{\cdot}x = b\ . \tag{6}$$

В этом уравнении два параметра a и b, и изменяются они независимо друг от друга. Как и в предыдущих уравнениях, рассмотрим два случая $a = 0$ и $a \neq 0$.

Решение. *Случай* I. $a = 0$. Тогда уравнение (6) принимает вид

$$0{\cdot}x = b\ . \tag{7}$$

Здесь также в зависимости от b ($b = 0$ и $b \neq 0$), уравнение (7) будет «вести» себя по-разному.

А) $b = 0$. Тогда уравнение (7) имеет вид

$$0{\cdot}x = 0\ .$$

Его решениями будут все $x \in R$.

В) $b \neq 0$; тогда уравнение $0{\cdot}x = b$ решений не имеет.

Случай II. $a \neq 0$, тогда $x = \dfrac{b}{a}$.

Ответ:
при $a = 0, b = 0$ решениями уравнения являются $x \in R$;
при $a = 0, b \neq 0$ решений нет;
при $a \neq 0, b \in R$ уравнение имеет одно решение $x = \dfrac{b}{a}$.

Таким образом, мы дали исчерпывающий ответ. Мы указали, какие решения будет иметь уравнение (6) при всех значениях параметров a и b.

Некоторые школьники в уравнениях вида $ax = b$ (а также $ax^2 + bx + +c = 0$ и других) не рассматривают случай $a = 0$. Это – существенная логическая ошибка, которая во многих случаях приводит к неверному результату. Ведь при определении линейного уравнения $ax = b$ нигде не оговаривается, что $a \neq 0$. Поэтому случай $a = 0$ должен быть обязательно рассмотрен. И решенные выше и далее примеры показывают, как это делается.

Задача 4. При каких a уравнение $(a^6 + 12a - 40)x = a^2 + a - 2$ имеет бесконечное число решений.

Решение. Воспользуемся результатами предыдущей задачи. Исходное уравнение имеет бесконечное число решений, если выполняются условия: $\begin{cases} a^6 + 12a - 40 = 0 \\ a^2 + a - 2 = 0 \end{cases}$. Решая второе уравнение, находим $a = -2$ и $a = 1$. Подставляя эти значения в первое уравнение, видим, что ему удовлетворяет только $a = -2$.

Ответ: $a = -2$.

Замечание. При решении системы двух уравнений с одним неизвестным совсем не обязательно решать оба уравнения и затем выбирать одинаковые корни обоих уравнений в качестве решений системы. Можно решить одно из уравнений и, подставив полученные значения во второе, проверить, удовлетворяют ли они ему, что зачастую проще. Это и было проделано нами в предыдущем примере.

Задача 5. При каких a все решения уравнения

$$(a^2 + a)x = 2a^2 + 3a$$

удовлетворяют условию $x > 1$.

Решение.

Случай I. $a^2 + a = 0$, т. е. $a = 0$ или $a = -1$.

Рассмотрим обе эти возможности. При $a = 0$ имеем уравнение $0 \cdot x = 0$, которое имеет решениями все $x \in R$. Следовательно, $a = 0$ условию задачи не удовлетворяет, т. к. часть решений в этом случае ≤ 1.

Значение $a = -1$ также условию задачи не удовлетворяет, т. к. в этом случае имеем уравнение $0 \cdot x = -1$, которое вообще не имеет решений.

<u>Случай II</u>. $a \neq 0$, $a \neq -1$. Тогда $x = \frac{2a^2+3a}{a^2+a} = \frac{2a+3}{a+1}$ – решение уравнения. Решим неравенство $x > 1$. Имеем

$$\frac{2a+3}{a+1} > 1 \Leftrightarrow \frac{2a+3}{a+1} - 1 > 0 \Leftrightarrow \frac{a+2}{a+1} > 0 .$$

Решением последнего неравенства будут все $a \in (-\infty; -2) \cup (-1; +\infty)$. Теперь нам осталось «выколоть» точку $a = 0$.

Ответ: $a \in (-\infty; -2) \cup (-1; 0) \cup (0; +\infty)$.

В заключение решим чуть более трудную задачу.

Задача 6. Решить относительно x уравнение

$$(\cos \pi p - 1)x = p^2 + p - 6 . \qquad (8)$$

Очевидно, что относительно x данное уравнение – линейное. Просто его коэффициент при x представляет собой тригонометрическую функцию параметра p. (Те, кто еще не знаком с тригонометрическими функциями, могут без ущерба для дальнейшего пропустить этот пример.)

Решение. Воспользуемся сразу выводами задачи 3.

А) При выполнении условий $\begin{cases} \cos \pi p - 1 = 0 \\ p^2 + p - 6 = 0 \end{cases}$ уравнение (8) имеет решениями $x \in R$. Найдем корни второго уравнения и подставим их в первое. Имеем $p^2 + p - 6 = 0 \Leftrightarrow p = 2$ или $p = -3$. При $p = 2$ первое уравнение превращается в верное равенство $\cos(2\pi) - 1 = 0$. При $p = -3$ имеем $\cos(3\pi) - 1 \neq 0$. Следовательно, только при $p = 2$ уравнение имеет решениями $x \in R$.

В) При $\begin{cases} \cos \pi p - 1 = 0 \\ p^2 + p - 6 \neq 0 \end{cases}$ исходное уравнение решений не имеет.

Имеем $\begin{cases} \cos \pi p = 1 \\ p \neq 2,\ p \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \pi p = 2\pi k \\ p \neq 2,\ p \neq -3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p = 2k,\ k \in Z \\ p \neq 2,\ p \neq -3 \end{cases}$.

Итак, первое уравнение системы выполняется при $p = 0,\ \pm 2,\ \pm 4,\ \pm 6$ и согласно второму условию, из этого множества надо «выкинуть» $p = 2$. Получаем, что исходное уравнение не имеет решений при $p = 0, -2, \pm 4, \pm 6 \ldots$

С) Наконец, при $\cos(\pi p) - 1 \neq 0$, т. е. при $p \neq 2k$, $k \in Z$, исходное уравнение имеет одно решение $x = \dfrac{p^2+p-6}{\cos \pi p - 1}$.

Ответ:
при $p = 2$ решениями являются $x \in R$;
при $p = 0, -2, \pm 4, \pm 6\ldots$ решений нет;
при $p \in R$, кроме $p \neq 0, \pm 2, \pm 4$ одно решение $x = \dfrac{p^2+p-6}{\cos \pi p - 1}$.

Заключительные замечания. Главные выводы при исследовании линейных уравнений с параметрами – это результаты задачи 3. Повторим их. Линейное уравнение $a \cdot x = b$:

1. имеет решения $x \in R$ при $\begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \end{cases}$; (9)

2. не имеет решений при $\begin{cases} a = 0 \\ b \neq 0 \end{cases}$; (10)

3. имеет единственное решение $x = \dfrac{b}{a}$ при $\begin{cases} a \neq 0 \\ b - \text{любое} \end{cases}$. (11)

Желательно эти выводы помнить (предварительно, конечно, поняв, как они получены), чтобы при решении более сложных задач сразу пользоваться готовыми результатами, а не выводить их каждый раз заново.

§ 2. ЛИНЕЙНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Вводные замечания. Прежде, чем переходить к задачам с параметрами, попробуем ответить на следующий вопрос. Верно ли какое-либо из следующих неравенств

1) $7 > 5$, 3) $7 > 7$,

2) $7 \geq 5$, 4) $7 \geq 7$.

Понимание ответа на этот вопрос для нас очень важно. Например, пусть дано неравенство $4x + 6 > 10$. Подставляя в это неравенство $x = 1$, получим $10 > 10$. Если последнее числовое неравенство верно, то $x = 1$ является решением исходного неравенства. Если же это числовое неравенство неверно, то $x = 1$ не является решением исходного неравенства. Таким образом, в зависимости от того, верно или неверно неравенство $10 > 10$, мы включим или не включим $x = 1$ в число решений.

С аналогичными ситуациями при решении неравенств с параметрами мы будем сталкиваться очень часто. Поэтому, чтобы решение неравенств не превратилось в манипуляции с буквой «x», необходимо в поставленных в начале этого параграфа вопросах разобраться. Ответы на них следуют из определений 1 и 2.

Определение 1. Число a больше числа b (записывается $a > b$), если разность $(a-b)$ – положительна.

Из этого определения сразу следует, что:

A) $5 > 3$ – верно, т. к. разность $5-3=2$ – положительна;

B) $2 > 5$ – неверно, т. к. разность $2-5=-3$ – отрицательна;

C) $5 > 5$ – неверно, т. к. разность $5-5=0$, а 0 не является ни положительным, ни отрицательным числом;

D) $0 > 0$ – неверно по той же причине.

Определение 2. Число a больше или равно, чем число b (записывается $a \geq b$), если разность $(a-b)$ – положительна или равна 0.

Из последнего определения сразу следует, что неравенство

A) $5 \geq 3$ – верно, т. к. разность $5-3=2$ – положительна.

Заметим, что условия разность $(a-b)$ – положительна или равна 0, не должны выполняться одновременно. В определении требуется, чтобы выполнялось хотя бы одно из этих условий – разность положительна или разность равна 0. Более того, одновременно эти условия не выполняются никогда!

B) $2 \geq 5$ – неверно, т. к. разность $2-5=-3$ – отрицательна.

C) $5 \geq 5$ – верно, т. к. разность $5-5=0$.

D) $0 \geq 0$ – верно, по той же причине.

Из сказанного ясно, что неравенства 1,2 и 4, выписанные в начале § 2, верны, а неравенство 3 – неверное.

Свойства неравенств

Кроме определений 1 и 2, нам в дальнейшем понадобятся основные свойства неравенств. Сформулируем их.

A) Если к обеим частям неравенства прибавить произвольное число c, знак неравенства не изменится. Т.е., если $a < b$ и c – произвольное число, то $a + c < b + c$.

B) Если обе части неравенства умножить на произвольное, положительное число k, то знак неравенства не изменится. Т.е., если $a < b$ и $k > 0$, то $ka < kb$.

C) Если обе части неравенства умножить на отрицательное число k, то знак неравенства изменится на противоположный. Т. е., если $a < b$ и $k < 0$, то $ka > kb$.

Последнее свойство мы сначала сформулируем, а затем объясним его.

D) Если $a<b$ и $b<c$, то $a<c$.

Это четвертое свойство, называемое в математике транзитивностью, выражает следующее: если первое число меньше второго $(a<b)$, а второе меньше третьего $(b<c)$, то первое число меньше третьего $(a<c)$.

Доказательства свойств 1–4 можно посмотреть в любом школьном учебнике алгебры за 8-й класс.

Замечание. Деление обеих частей неравенства на k можно представить как умножение на $\frac{1}{k}$. И тогда из свойств 2 и 3 сразу следует, что при делении обеих частей неравенства на положительное число k знак неравенства не изменится, а при делении на отрицательное число знак неравенства изменяется на противоположный.

Перейдем к неравенствам с параметрами.

Задача 7. При всех значениях параметра a решить неравенство

$$(a^2-a)x<3-3a. \tag{12}$$

Если бы мы решали уравнение $(a^2-a)x=3-3a$, мы бы рассматривали два случая: $a^2-a=0$ и $a^2-a\neq 0$. При решении же неравенства нам придется рассмотреть три случая: $a^2-a=0$, $a^2-a>0$ и $a^2-a<0$. Это связано с тем, что свойства неравенств при делении на положительные и на отрицательные числа разные. А нам придется в этом примере делить на a^2-a.

Решение.

<u>*Случай* I</u>. $a^2-a=0$, т. е. $a=0$ или $a=1$.

A) $a=0$. Тогда неравенство (12) имеет вид: $0\cdot x<3$, которое, очевидно, выполняется при любом x.

B) $a=1$. Тогда имеем неравенство $0\cdot x<0$, которое не выполняется ни при каких x. (Еще раз напомним, неравенство $0<0$ – неверное).

<u>*Случай* II</u>. $a^2-a>0 \Leftrightarrow a(a-1)>0 \Leftrightarrow a\in(-\infty;0)\cup(1;+\infty)$. Тогда, разделив обе части неравенства (12) на a^2-a, получаем

$$x<\frac{3-3a}{a^2-a}=\frac{-3(a-1)}{a(a-1)}=-\frac{3}{a}.$$

Следовательно, решениями неравенства в этом случае будут $x\in(-\infty;-\frac{3}{a})$.

<u>*Случай* III</u>. $a^2-a<0 \Leftrightarrow a\in(0;1)$. Тогда, разделив на a^2-a и поменяв знак неравенства, получаем

$$x > \frac{3-3a}{a^2-a} = -\frac{3}{a}, \text{ т. е. } x \in \left(-\frac{3}{a}; +\infty\right).$$

Ответ:
при $a = 0$ решениями являются $x \in R$;
при $a = 1$ решений нет;
при $a \in (0;1)$ решениями являются $x \in \left(-\frac{3}{a}; +\infty\right)$;
при $a \in (-\infty;0) \cup (1;+\infty)$ решениями являются $x \in \left(-\infty; -\frac{3}{a}\right)$.

Исследуем теперь линейное неравенство в общем виде.

Задача 8. При всех значениях параметров a и b решить неравенство

$$a \cdot x < b. \tag{13}$$

Решение.

<u>*Случай* I</u>. $a = 0$. Тогда неравенство (13) имеет вид:

$$0 \cdot x < b. \tag{14}$$

A) Если $b > 0$, то последнее неравенство выполняется при всех $x \in R$.

B) Если $b \leq 0$, то неравенство (14) решений не имеет.

<u>*Случай* II</u>. $a > 0$, тогда неравенство (13) равносильно $x < \frac{b}{a}$, т. е. $x \in (-\infty; \frac{b}{a})$.

<u>*Случай* III</u>. $a < 0$. Тогда, разделив обе части неравенства (13) на a и поменяв знак неравенства, получим $x > \frac{b}{a}$, т. е. $x \in (\frac{b}{a}; +\infty)$.

Ответ:
при $a = 0, b > 0$ решениями являются $x \in R$;
при $a = 0, b \leq 0$ решений нет;
при $a > 0, b \in R$ решениями являются $x \in \left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$;
при $a < 0, b \in R$ решениями являются $x \in \left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Из только что разобранной задачи видна структура решений линейного неравенства, т. е. какое множество чисел может быть решением линейного неравенства $a \cdot x < b$ при разных a и b. Это:

A) множество всех действительных чисел R;

B) $\varnothing$;

C) Луч $\left(-\infty; \frac{b}{a}\right)$ или луч $\left(\frac{b}{a}; +\infty\right)$.

Других вариантов нет. Полученные выводы часто используются при решении задач, поэтому их надо понимать и помнить.

Задача 9. При каких a множество решений уравнения

$$(a^3 - a)x = 2a^{12} - 3a \tag{15}$$

и неравенства

$$(a^2 - a)x < 3 - 3a \tag{16}$$

совпадают.

Решение. Множеством решений неравенства (16) может быть пустое множество, вся числовая прямая и луч. Множеством решений уравнения (15) может быть пустое множество, вся числовая прямая и одна точка.

Из сказанного ясно, что множества решений будут совпадать, если они оба представляют собой пустое множество или всю числовую прямую.

Неравенство (16) нами было решено в задаче 7. Мы видели, что оно:

А) не имеет решений при $a = 1$;

В) имеет решениями всю числовую ось при $a = 0$.

Подставим эти значения a в уравнение (15).

А) При $a = 1$ имеем, $0 \cdot x = -1$. Это уравнение решений не имеет. Следовательно, при $a = 1$ и уравнение, и неравенство имеют пустое множество решений.

В) При $a = 0$ имеем $0 \cdot x = 0$. Решениями этого уравнения будут все $x \in R$. Следовательно, при $a = 0$ и неравенство, и уравнение имеют решениями $x \in R$.

Таким образом, при $a = 0$ и уравнение, и неравенство имеют решениями всю числовую прямую, а при $a = 1$ – пустое множество.

Ответ: $a = 0$ или $a = 1$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

При всех a решить уравнения:

1. $ax = a^2$; 2. $2ax - 3a = 4x + 1$;
3. $a^2x - a = 4x - 2$; 4. $a^2(x - 2) = x + a - 3$.
5. При всех значениях α решить уравнение $x\sin\alpha + \cos\alpha = 1$.
6. Найти все значения p, при которых все решения уравнения $p(p + 2x) = 7x + 2p + 5$ удовлетворяют неравенству $x \geq -3$.
7. Найти все a, при которых множества решений уравнений $(a^2 + a - 6)x = 2a^2 - 3a - 2$ и $(3a^2 - a - 10)x = 3a^2 - 4a - 4$ совпадают.
8. При всех m решить неравенство $(m - 1)x < 5m$.

При всех a решить неравенства:

9. $ax \le 1$; 10. $2a^2x - 2a + 2 > (a + 1)x$; 11. $a(ax - 1) \ge x + 1$.

12. При всех a и b решить неравенство $ax - 2a > bx - 2b$.

13. При каких a все решения неравенства $x - 4 + 2a < 0$ являются решениями неравенства $2x + 3 - a < 0$?

14. При каких a уравнение $(a^5 - 5a^3 + 8)x = a^2 + a - 6$ имеет бесконечное число решений?

15. При каких a уравнение $(3a^2 - a - 2)x = 6a + 4$ не имеет решений?

16. При каких a множества решений уравнения $(2a^2 - a - 1)x = 5a - 5$ и неравенства $(6a^2 + a - 1)x \ge 3a + 2$ совпадают?

БОЛЕЕ ТРУДНЫЕ ЗАДАЧИ

17. При каких a неравенство $ax + 2 - \frac{a}{3} > 0$ выполняется при всех $x \in (1; 2)$?

18. При каких a множество решений неравенств $(a^2 - 6a + 8)x \le 3a - 12$ и $(2a^2 - a^3)x \ge 6a + 7 - 4a^2$ совпадают?

19. При каких a множества решений неравенств $(a^2 - a)x < 3 - 3a$ и $(11a - 3a^2 - 8)x > a^2 - 6a + 5$ совпадают?

20. Найти все значения a, при которых уравнение $(3b + 1)x = a^2 + +5a + 6b + 4$ имеет решения при любом b .

21. При каких a и b уравнение $(a + b)(abx - 1) = ab + 6x - 5$ имеет более одного решения?

Глава 3

КВАДРАТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе мы рассмотрим уравнения вида $ax^2 + bx + c = 0$. При $a = 0$ это уравнение – **линейное**, при $a \neq 0$ – **квадратное**. Число различных задач с параметрами для квадратных уравнений неизмеримо больше, чем для линейных, и они намного разнообразнее. Рассмотрим примеры.

Задача 1. При каких a уравнение

$$x^2 + 2(a+1)\,x + 9a - 5 = 0 \tag{1}$$

имеет один корень; два корня; ни одного корня.

Решение. Данное уравнение – квадратное. Оно имеет один корень, когда дискриминант равен 0. Имеем:

$$\mathrm{D} = (2(a+1))^2 - 4\cdot1\cdot(9a-5) = 4a^2 - 28a + 24 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 1,\ a_2 = 6.$$

Итак, при $a = 1$ и $a = 6$ уравнение (1) имеет один корень. Исходное уравнение имеет два корня, если $\mathrm{D} > 0$. Имеем, $4a^2 - 28a + 24 > 0$. Решая это неравенство, получаем $a \in (-\infty;\ 1)\cup(6;\ +\infty)$. И квадратное уравнение (1) не имеет корней, если $\mathrm{D} < 0$. Имеем, $4a^2 - 28a + 24 < 0$. Решая последнее неравенство, получаем $a \in (1;\ 6)$.

Ответ:
- при $a = 1$ и $a = 6$ одно решение;
- при $a \in (1;6)$ решений нет;
- при $a \in (-\infty;1)\cup(6;\infty)$ два решения.

Задача 2. Найти все значения a, при которых уравнение

$$(2a+3)x^2 - 2ax + a - 2 = 0 \tag{2}$$

имеет два решения.

Некоторые школьники рассуждают в этой задаче так же, как и в предыдущей: «Раз есть x^2, то исходное уравнение – квадратное. А чтобы квадратное уравнение имело два решения, необходимо, чтобы дискриминант уравнения был положительным».

Ошибка в этом рассуждении заключается в том, что при $a = -\dfrac{3}{2}$ коэффициент при x^2 равен 0 и уравнение становится линейным. А для линейного уравнения говорить о дискриминанте не имеет смысла. Понятие дискриминанта существует только для квадратных уравнений. Следовательно, при решении уравнения (2) надо отдельно рассматривать два случая:

$2a + 3 = 0$ и $2a + 3 \neq 0$. В первом случае исходное уравнение будет линейным, во втором – квадратным.

Решение. Случай I. $2a + 3 = 0$, т. е. $a = -\frac{3}{2}$. Тогда уравнение (2) имеет вид: $3x - \frac{7}{2} = 0$. Это уравнение имеет единственное решение $x = \frac{7}{6}$. Следовательно, $a = -\frac{3}{2}$ условию задачи не удовлетворяет. Случай II. $2a + 3 \neq 0$, т. е. $a \neq -\frac{3}{2}$. Тогда уравнение (2) – квадратное. Чтобы оно имело два решения, необходимо и достаточно, чтобы его дискриминант $D = (2a)^2 - 4(2a + 3)(a - 2) = -4a^2 + 4a + 24$ был положительным. Решая неравенство $-4a^2 + 4a + 24 > 0 \Leftrightarrow a^2 - a - 6 < 0$, находим $a \in (-2; 3)$. Теперь, «выкалывая» из этого промежутка точку $a = -\frac{3}{2}$, получаем

Ответ: $a \in (-2; -\frac{3}{2}) \cup (-\frac{3}{2}; 3)$.

Замечание 1. Отличие задач 1 и 2 состоит в том, что уравнение (1) является квадратным при всех a, т. к. в нём коэффициент при x^2 равен единице. Поэтому сразу можно исследовать его дискриминант. А уравнение (2) при $a = -\frac{3}{2}$ является линейным, при остальных a – квадратным. Поэтому случай $a = -\frac{3}{2}$ должен быть исследован отдельно.

Замечание 2. При решении задачи 2 некоторые школьники вместо нахождения искомых значений a начинают искать корни уравнения (2)

$$x_1 = \frac{2a + \sqrt{-4a^2 + 4a + 24}}{4a + 6}, \qquad x_2 = \frac{2a - \sqrt{-4a^2 + 4a + 24}}{4a + 6}$$

и записывают их в качестве ответа задачи. Это абсолютно неверно. Ведь в условии задачи совсем не требуется находить корни уравнения, а требуется найти лишь значения a, при которых уравнение имеет два различных корня. Поэтому при решении задач с параметрами надо прежде всего внимательно ознакомиться с условием задачи, выяснить, что требуется найти.

Задача 3. Найти все значения a, при которых уравнение

$$(a + 1)x^2 - ax + a - 3 = 0 \tag{3}$$

имеет не более одного решения.

Решение. _Случай I_. $a + 1 = 0$, т. е. $a = -1$. Тогда уравнение имеет вид $0 \cdot x^2 + x - 1 - 3 = 0$ или $x - 4 = 0$, которое, очевидно, имеет единственный корень $x = 4$. Следовательно, $a = -1$ удовлетворяет условию задачи.

Случай II. $a + 1 \neq 0$. Тогда уравнение (3) – квадратное. Нам подходят a, при которых уравнение (3) имеет либо один корень (тогда $D = 0$), либо не имеет корней (в этом случае $D < 0$). Итак, имеем систему

$$\begin{cases} a + 1 \neq 0 \\ D \leq 0 \end{cases}. \tag{4}$$

$D = (-a)^2 - 4(a + 1)(a - 3) = -3a^2 + 8a + 12$. Неравенство $-3a^2 + 8a + 12 \leq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 3a^2 - 8a - 12 \geq 0$ выполняется для $a \in (-\infty; \frac{4 - 2\sqrt{13}}{3}] \cup [\frac{4 + 2\sqrt{13}}{3}; +\infty)$.

Учитывая значение $a = -1$ из Случая I (оно не входит ни в один из промежутков, найденных в Случае II), запишем окончательный

Ответ: $a \in (-\infty; \frac{4 - 2\sqrt{13}}{3}] \cup [\frac{4 + 2\sqrt{13}}{3}; +\infty)$ и $a = -1$.

Разобранные три задачи являлись различными вариациями по существу одной и той же задачи – исследование числа решений уравнения $ax^2 + bx + c = 0$. Они показывают какие тонкости могут встретиться при этом исследовании.

Для понимания следующих задач необходимо знать основные факты школьной программы о квадратных уравнениях. Напомним их.

Теорема Виета. Если x_1 и x_2 – корни квадратного уравнения $ax^2 + bx + c = 0$, то они связаны с коэффициентами соотношениями:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}. \tag{5}$$

Следствие. Если x_1 и x_2 – корни уравнения $x^2 + bx + c = 0$, то

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -b \\ x_1 \cdot x_2 = c \end{cases}.$$

Теорема Виета (обратная). Пусть x_1 и x_2 – произвольные числа. Обозначим их сумму $x_1 + x_2 = p$ и произведение $x_1 \cdot x_2 = q$. Тогда уравнение $x^2 - px + q = 0$ имеет своими корнями числа x_1 и x_2.

С помощью теоремы Виета иногда можно подобрать корни. Например, корни x_1 и x_2 уравнения $x^2-5x-6=0$ должны удовлетворять условиям:

$$\begin{cases} x_1+x_2=5 \\ x_1\cdot x_2=-6 \end{cases}.$$

Легко подобрать такие числа $x_1=-1$, $x_2=6$.

Аналогично, если x_1 и x_2 – корни уравнения $4x^2+8x-5=0$, то должны выполняться соотношения:

$$\begin{cases} x_1+x_2=-2 \\ x_1\cdot x_2=-\dfrac{5}{4} \end{cases}.$$

Чуть труднее, но тоже можно подобрать такие числа $x_1=\dfrac{1}{2}$, $x_2=-\dfrac{5}{2}$.

Еще один пример. Если x_1 и x_2 — корни уравнения

$$x^2-(a+\frac{1}{2})x+\frac{a}{2}=0, \tag{6}$$

то они удовлетворяют соотношениям

$$\begin{cases} x_1+x_2=a+\dfrac{1}{2} \\ x_1\cdot x_2=\dfrac{a}{2} \end{cases}.$$

Легко видеть, что числа $x_1=a$ и $x_2=\dfrac{1}{2}$ удовлетворяют данной системе и, следовательно, являются корнями уравнения. (Найдите в качестве упражнения корни последнего уравнения через дискриминант и убедитесь, что они действительно равны a и $\dfrac{1}{2}$.)

Задача 4. Составить квадратное уравнение, имеющее своими корнями числа $x_1=\sqrt{5}-1$ и $x_2=\sqrt{5}+1$.

Решение. Имеем $x_1+x_2=\sqrt{5}-1+\sqrt{5}+1=2\sqrt{5}$ и $x_1\cdot x_2=4$. Согласно обратной теореме Виета, уравнение $x^2-2\sqrt{5}x+4=0$ имеет своими корнями числа $x_1=\sqrt{5}-1$ и $x_2=\sqrt{5}+1$.

Задача 5. Не решая уравнения

$$x^2-6x+1=0, \tag{7}$$

найти $A = x_1^2 + x_2^2$ и $B = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1}$, где x_1 и x_2 – корни уравнения (7).

Решение. Представим

$$A = x_1^2 + x_2^2 = x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1x_2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2.$$

По теореме Виета $x_1 + x_2 = 6$, $x_1x_2 = 1$. Следовательно, $A = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 6^2 - 2\cdot 1 = 34$. Аналогично,

$$B = \frac{x_1^2}{x_2} + \frac{x_2^2}{x_1} = \frac{x_1^3 + x_2^3}{x_1x_2} = \frac{(x_1+x_2)(x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2)}{x_1x_2}.$$

Подставляя $x_1 + x_2 = 6$, $x_1x_2 = 1$ и $x_1^2 + x_2^2 = 34$ (см. выше), получим $B = \frac{6(34-1)}{1} = 198$.

Однако будьте осторожны!

Задача 6. Пусть дано квадратное уравнение

$$x^2 - 4x + 5 = 0\,. \qquad (8)$$

Верно ли, что $x_1^2 + x_2^2 = 6$, где x_1 и x_2 – корни уравнения (8)?

Решение. Аналогично предыдущему примеру $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 4^2 - 2\cdot 5 = 6$. Формально вроде бы да. Но в отличие от примера 6, уравнение (8) не имеет действительных корней. Поэтому о сумме квадратов $x_1^2 + x_2^2$ не имеет смысла говорить.

Ответ: Неверно. Сумма $x_1^2 + x_2^2$ не существует.

Отличие задач 6 и 7 в том, что в задаче 6 дискриминант положительный и корни существуют, а в задаче 7 – отрицательный, и корней нет. Поэтому начинать решение данной задачи и аналогичных ей, надо было с того, что найти дискриминант и проверить, что он неотрицательный.

Задача 7. При каком значении p отношение корней уравнения $px^2 - px - 3x = -3$ равно 3 ?

Решение. Приведем уравнение к виду $px^2 - (p + 3)x + 3 = 0$.

Если $p = 0$, то уравнение становится линейным и имеет вид $-3x + 3 = 0$. Решением этого уравнения будет один корень $x = 1$. Поэтому об отношении корней не имеет смысла говорить. Следовательно, значение $p = 0$ условию задачи не удовлетворяет.

Если $p \neq 0$, то исходное уравнение – квадратное. Пусть p – искомое значение параметра, а x_1 и x_2 – соответствующие этому значению корни, отношение которых равно 3, т. е. $\frac{x_1}{x_2} = 3$. Тогда, применяя теорему Виета, получаем систему уравнений с тремя неизвестными x_1, x_2 и p:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = \dfrac{p+3}{p} \\ x_1 \cdot x_2 = \dfrac{3}{p} \\ \dfrac{x_1}{x_2} = 3 \end{cases}.$$

Находя из последнего уравнения $x_1 = 3x_2$ и подставляя это значение в первое уравнение, получаем $x_2 = \frac{p+3}{4p}$. Следовательно, $x_1 = 3x_2 = \frac{3p+9}{4p}$. Подставляя найденные значения x_1 и x_2 во второе уравнение системы, получаем уравнение $\frac{3p+3}{4p} \cdot \frac{p+3}{4p} = \frac{3}{p}$. После несложных преобразований оно приводится к квадратному уравнению $p^2 - 10p + 9 = 0$, корни которого $p = 1$ и $p = 9$. Проверка показывает, что оба эти значения p удовлетворяют условию задачи.

Ответ: $p = 1$ или $p = 9$.

Задача 8. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2 - ax + a + 7 = 0$ равна 10 ?

Решение. Пусть x_1 и x_2 – корни данного уравнения. Тогда по теореме Виета

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = a \\ x_1 \cdot x_2 = a + 7 \end{cases}.$$

Теперь имеем $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = a^2 - 2(a + 7)$. По условию $a^2 - 2(a + 7) = 10$, откуда $a_1 = 6$, $a_2 = -4$. Легко видеть, что при $a = 6$ исходное уравнение корней не имеет, т. к. его дискриминант отрицателен, а число $a = -4$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = -4$.

Ниже нам понадобится теорема о разложении квадратного трехчлена на множители.

Теорема. Пусть x_1 и x_2 – корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$[1]. Тогда справедливо равенство $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2)$.

Заметим, что если квадратный трехчлен имеет один корень $x = x_1$ (иногда в этом случае говорят, что квадратный трехчлен имеет <u>два совпадающих корня</u>), то разложение имеет вид $ax^2 + bx + c = a(x - x_1)^2$. Если корней нет, то квадратный трехчлен на линейные множители не раскладывается.

График функции $y = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, как известно, называется параболой. Ее ветви направлены вверх при $a > 0$ и вниз при $a < 0$. Вершина $x_в$ параболы находится по формуле $x_в = -\dfrac{b}{2a}$.

Если дискриминант $D > 0$, то парабола пересекает ось Ox в двух точках; если $D = 0$, то касается оси Ox в одной точке; если $D < 0$, то вовсе не пересекает ось Ox.

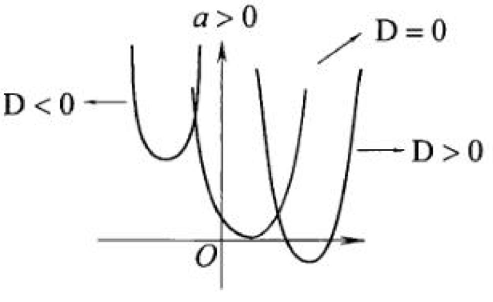


Рис. 1 $y = ax^2 + bx + c$, $a > 0$

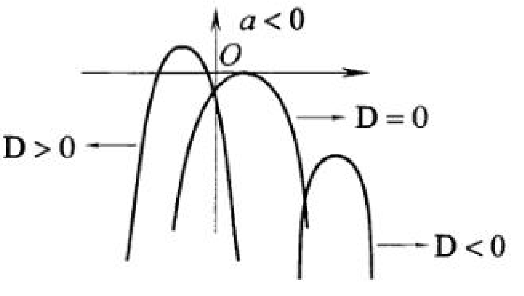


Рис. 2 $y = ax^2 + bx + c$, $a < 0$

На рисунках 1 и 2 представлены параболы при $a > 0$ и $a < 0$.

По графику квадратного трехчлена можно определить знаки коэффициентов a, b и c.

Задача 9. Определить знаки коэффициентов a, b, c и дискриминанта D квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ по графикам, изображенным на рис. 3.

Решение. У квадратного трехчлена, представленного параболой I, $a > 0$, т. к. ветви направлены вверх. Знак c определяется точкой пересечения параболы с осью Oy. Действительно, при $x = 0$ имеем $y(0) = a \cdot 0^2 + b \cdot 0 + c = c$. Сле-

[1] Корнями квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ называются корни соответствующего уравнения $ax^2 + bx + c = 0$.

довательно, c есть ордината точки пересечения параболы с осью Oy. В нашем случае $c > 0$ (см. рис. 3, парабола I).

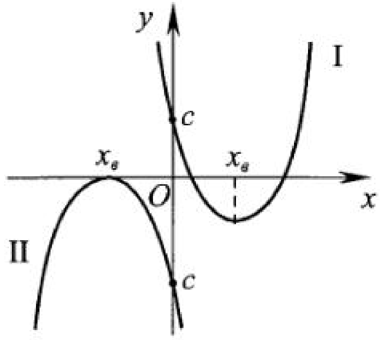


Рис. 3

Для определения знака b воспользуемся положением вершины на графике. У параболы I $x_в > 0$. С другой стороны, $x_в = -\frac{b}{2a}$. Следовательно, $\frac{b}{2a} > 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} < 0$. Так как $a > 0$, то чтобы последнее неравенство выполнялось, должно быть $b < 0$. И наконец, поскольку парабола пересекает ось Ox в двух точках, то $\mathrm{D} > 0$.

У квадратного трехчлена, представленного параболой II, $a < 0$, т. к. ветви направлены вниз; $\mathrm{D} = 0$, так как парабола касается оси Ox; $c < 0$, т. к. парабола II пересекает ось Oy в отрицательной части (рис. 3). И, наконец, у параболы II $x_в < 0$, следовательно, $-\frac{b}{2a} < 0 \Leftrightarrow \frac{b}{2a} > 0$. Так как $a < 0$, то, чтобы неравенство выполнялось, b должно быть также меньше нуля.

Ответ: $\left|\begin{array}{l} \mathrm{I}:\ a>0,\ b<0,\ c>0,\ \mathrm{D}>0; \\ \mathrm{II}:\ a<0,\ b<0,\ c<0,\ \mathrm{D}=0. \end{array}\right.$

Сейчас мы перейдем к задачам, наиболее важным для всего последующего курса. Это задачи, связанные с исследованием расположения корней квадратного трехчлена на числовой оси в зависимости от его коэффициентов. В следующих главах мы увидим, что решение многих алгебраических, показательных, логарифмических, тригонометрических уравнений и неравенств с параметрами сводится к исследованию расположения корней квадратного трехчлена. Этим задачам посвящена дальнейшая часть этой главы.

Рассмотрим конкретный пример.

Задача 10. Найти, при каких значениях параметра a корни квадратного уравнения

$$x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5 = 0 \tag{9}$$

будут больше, чем 5.

Разберем эту задачу подробно. При каждом значении a уравнение (9) имеет (или не имеет) корни. Нам надо отобрать те значения a, при которых уравнение имеет корни, и эти корни больше 5. Ясно, что перебор всех $a \in R$ невозможен, т. к. «количество» значений a бесконечно. Следовательно, задачу необходимо решать по-другому.

Ее можно решить просто «в лоб», найдя корни уравнения (9) и выяснить, при каких a они больше 5.

Имеем, $D = (2(a+1))^2 - 4\cdot 1\cdot(9a-5) = 4a^2 - 28a + 24$. Чтобы квадратное уравнение имело корни, должно быть $D \geq 0$.

Решая неравенство $4a^2 - 28a + 24 \geq 0 \Leftrightarrow a^2 - 7a + 6 \geq 0$, находим $a \in (-\infty; 1] \cup [6; +\infty)$. При этих a корни квадратного уравнения (9) равны:

$$x_1 = \frac{2(a+1) - \sqrt{4a^2 - 28a + 24}}{2} = a + 1 - \sqrt{a^2 - 7a + 6},$$

$$x_2 = \frac{2(a+1) + \sqrt{4a^2 - 28a + 24}}{2} = a + 1 + \sqrt{a^2 - 7a + 6}.$$

Решив теперь два иррациональных неравенства $x_1 > 5$ и $x_2 > 5$, мы найдем искомые a.

Но если заметить, что $\sqrt{t}$ – число неотрицательное, то нетрудно показать, что корень x_2 всегда больше x_1. Действительно, у корня x_2 к числу $a + 1$ прибавляется неотрицательное число $\sqrt{a^2 - 7a + 6}$, а у корня x_1 от $a + 1$ вычитается то же самое неотрицательное число. Поэтому $x_2 \geq x_1$. Следовательно, достаточно решить только одно неравенство $x_1 > 5$. И, поскольку $x_2 \geq x_1$, то условие $x_2 > 5$ будет выполняться автоматически.

Итак, наша задача свелась к решению иррационального неравенства:

$$a + 1 - \sqrt{a^2 - 7a + 6} > 5 \Leftrightarrow \sqrt{a^2 - 7a + 6} < a - 4.$$

Решив его, получим ответ.

Ответ: $a \in [6; 10)$ [1].

В этой задаче мы обошлись решением только одного иррационального неравенства. Однако в других задачах, связанных с расположением корней квадратного уравнения, нам пришлось бы решать до шести–восьми иррациональных неравенств. Это приводит к достаточно долгим и громоздким вычислениям.

---

[1] Тех, кто не знает или забыл, как решаются иррациональные неравенства, может прочесть этот материал в пособиях (2) или (9).

Возникает вопрос, можно ли установить расположение корней квадратного трехчлена по его коэффициентам без решения иррациональных неравенств. Например, выяснить, при каких условиях корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ меньше, чем число M? Или когда они больше, чем M? Когда корни принадлежат промежутку $[M; N]$? Таких задач можно сформулировать очень много. Мы решим основные из них. Поняв решение этих задач, читатель без труда решит любые другие задачи этого вида.

Начнем с первой задачи. При каких условиях корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ меньше, чем число M?

Нарисуем параболу, соответствующую данному случаю. То, что корни x_1, x_2 квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ меньше M означает, что парабола, соответствующая этому случаю, пересекает ось Ox «левее» числа M. Это представлено на рисунках 4 $(a > 0)$ и 5 $(a < 0)$.

Наша задача теперь перевести данные графики на язык формул. То есть найти условия на коэффициенты, при которых графики квадратных трехчленов $y = ax^2 + bx + c$ будут расположены относительно точки M так, как показано на рисунках 4 и 5. Мы сформулируем эти условия в виде теорем, а затем разберем каждое из условий в этих теоремах отдельно.

Как обычно, для квадратного трехчлена $f(x) = ax^2 + bx + c$ через $f(M)$ будем обозначать его значение в точке M, т. е. $f(M) = aM^2 + bM + c$. Иногда вместо $f(M)$ будем писать также $y(M)$.

Теорема 1. Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена были меньше, чем число M (т. е. лежали на числовой оси левее, чем точка M), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

<u>Случай 1</u> $a > 0$:

$$\begin{cases} a > 0 \\ \mathrm{D} \geq 0 \\ x_в = -\dfrac{b}{2a} < M \\ f(M) > 0 \end{cases} \quad \text{(рис. 4);}$$

<u>Случай 2</u> $a < 0$:

$$\begin{cases} a < 0 \\ \mathrm{D} \geq 0 \\ x_в = -\dfrac{b}{2a} < M \\ f(M) < 0 \end{cases} \quad \text{(рис. 5).}$$

На рис. 4 и 5 изображены параболы, отражающие условия этой теоремы.[1]

Мы не будем давать формального доказательства этой теоремы (попробуйте сделать это самостоятельно!), а объясним все ее условия на графиках.

Рассмотрим сначала случай $a > 0$ (рис. 4). Условие $\mathrm{D} \geq 0$ необходимо, чтобы квадратный трехчлен имел корни. Условие $x_в < M$ «уводит» кор-

[1] Чтобы не загромождать чертежи большим числом пунктирных линий, мы часто будем значения $f(M)$ и $f(N)$ писать не на оси Oy, а рядом с соответствующими точками графика как на рис. 4 и 5.

ни «влево» от M. Но одного этого условия недостаточно. На рис. 6 приведен пример, когда $x_в < M$, но один из корней (корень x_2) находится правее M. Следовательно, правую ветвь параболы необходимо «увести» левее M. Это и делается с помощью условия $f(M) > 0$. Но одного условия $f(M) > 0$ также недостаточно. На рис. 7 $f(M) > 0$, но оба корня находятся правее M. Следовательно, необходимы оба условия $f(M) > 0$ и $x_в < M$. Все эти условия и выписаны в Теореме 1 в Случае 1.

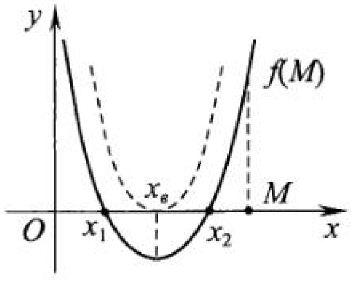


Рис. 4

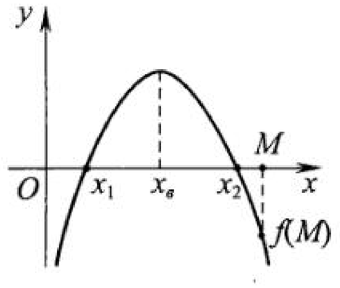


Рис. 5

В Случае 2 выписаны условия, при которых корни квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ меньше, чем M при $a < 0$. Они полностью аналогичны условиям в Случае 1. Условие $D \geq 0$ необходимо, чтобы корни существовали. Одновременное выполнение условий $x_в < M$ и $f(M) < 0$ «уводит» параболу «влево» от точки M. Соответствующая этому случаю парабола изображена на рис. 5.

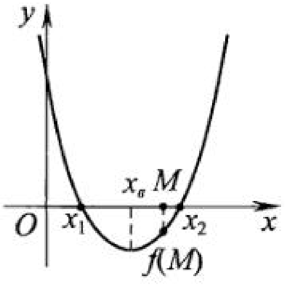


Рис. 6

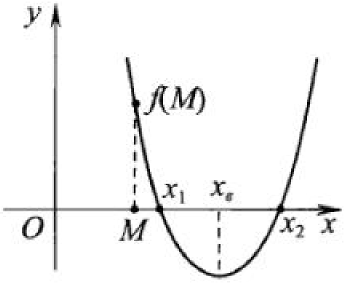


Рис. 7

Замечание. Случай касания параболы с осью Ox изображен на рис. 4 пунктиром. В этом случае квадратный трехчлен имеет один корень, и этот корень меньше M. Следовательно, он удовлетворяет условиям теоремы и учтен в условии $D \geq 0$. На рис. 5 и часто далее, чтобы не загромождать чертеж, мы не будем отражать этот случай отдельной параболой. Но, конечно, где это необходимо, как в Случае 2, будем его учитывать, включая $D = 0$ в условия теоремы.

Вообще, чтобы хорошо решать задачи с параметрами, надо научиться соотношения для квадратного трехчлена, заданные неравенствами (или равенствами), переводить на язык графиков. И обратно, график, отражающий нужную нам «конфигурацию», переводить на язык формул!

Разберем теперь условия, при которых корни квадратного трехчлена больше, чем M.

Теорема 2. Для того, чтобы оба корня квадратного трехчлена были больше M, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

<u>*Случай 1*</u> $a > 0$:

$$\begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0 \\ x_в = -\frac{b}{2a} > M \\ f(M) > 0 \end{cases};$$

<u>*Случай 2*</u> $a < 0$:

$$\begin{cases} a < 0 \\ D \geq 0 \\ x_в = -\frac{b}{2a} > M \\ f(M) < 0 \end{cases}.$$

На рис. 8 и 9 изображены графики, отражающие условия этой теоремы.

Условия теоремы 2 аналогичны условиям теоремы 1, с той лишь разницей,

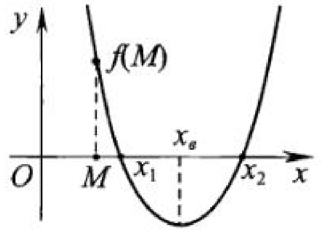


Рис. 8 $a > 0$

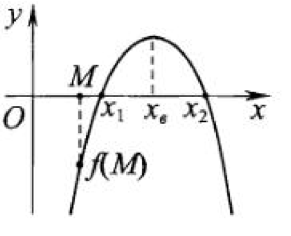


Рис. 9 $a < 0$

что в теореме 2 $x_в > M$, поскольку корни x_1 и x_2 должны быть правее M. Подробно все условия теоремы 2 проанализируйте самостоятельно.

В следующей теореме сформулированы условия, при которых корни квадратного трехчлена принадлежат интервалу $(M; N)$. (Другими словами, находятся между числами M и N.) Она является объединением теорем 1 и 2. Соответствующие этой теореме графики изображены на рис. 10 и 11.

Теорема 3. Для того, чтобы оба корня квадратного трёхчлена находились между M и N, необходимо и достаточно выполнение условий теорем 1 и 2:

Случай 1

$$\begin{cases} a>0 \\ \mathrm{D}\ge 0 \\ M<x_в=-\frac{b}{2a}<N \\ f(M)>0 \\ f(N)>0 \end{cases} \text{(рис. 10);}$$

Случай 2

$$\begin{cases} a<0 \\ \mathrm{D}\ge 0 \\ M<x_в=-\frac{b}{2a}<N \\ f(M)<0 \\ f(N)<0 \end{cases} \text{(рис. 11).}$$

Условие $\mathrm{D} \ge 0$ необходимо, чтобы корни трехчлена существовали. Одновременное выполнение условий $M < x_в < N$, $f(M) > 0$ и $f(N) > 0$ при $a > 0$ «загоняет» корни между числами M и N.

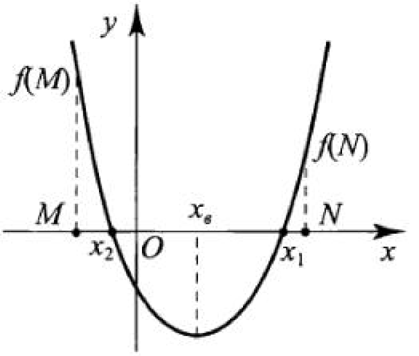


Рис. 10 $a>0$

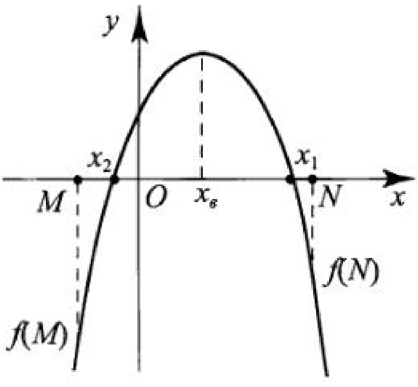


Рис. 11 $a<0$

При $a < 0$ (Случай 2) условия полностью аналогичны условиям теоремы в Случае 1.

Сейчас мы сформулируем условия, при которых корни уравнения лежат по разные стороны от некоторого фиксированного числа M.

Теорема 4. Для того чтобы один из корней квадратного трехчлена был больше, чем M, а другой – меньше, чем M, необходимо и достаточно выполнение следующих условий (рис. 12 и 13):

Случай 1 $a > 0$:

$$\begin{cases} a>0 \\ f(M)<0 \end{cases} \text{(рис. 12);}$$

Случай 2 $a < 0$:

$$\begin{cases} a<0 \\ f(M)>0 \end{cases} \text{(рис. 13).}$$

Интерпретация условий теоремы 4 проста. Если ветви параболы направлены вверх ($a > 0$) и в некоторой точке M значение $f(M) < 0$, то квадратный трехчлен имеет два корня, причем один корень будет меньше M, а другой больше M (рис. 12). Условие $\mathrm{D} > 0$ мы не включили в условия теоремы – оно будет выполняться автоматически. Поскольку как видно из рис. 12, при $a > 0$ и $f(M) < 0$ парабола пересекает ось Ox в двух точках [1], и следовательно, $D > 0$.

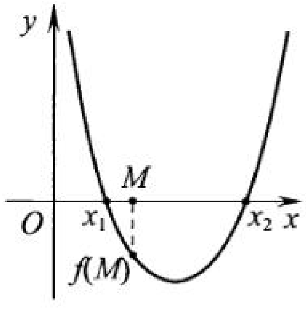


Рис. 12

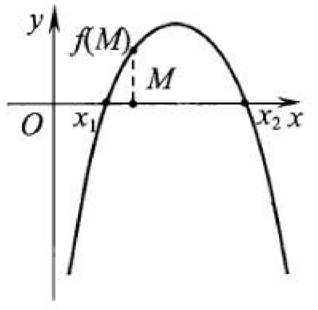


Рис. 13

Точно так же интерпретируются условия при $a < 0$ (Случай 2).

Наконец, перейдем к последней, пятой теореме. Она есть обобщение теоремы 4. В ней мы сформулируем условия, когда отрезок $[M; N]$ находится между корнями квадратного трехчлена.

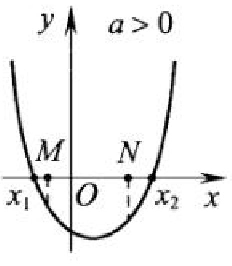


Рис. 14

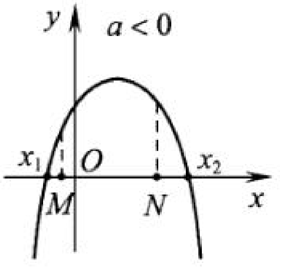


Рис. 15

Теорема 5. Для того чтобы весь отрезок $[M; N]$ целиком лежал между корнями, необходимо и достаточно:

<u>*Случай 1*</u>

$$\begin{cases} a > 0 \\ f(M) < 0; \\ f(N) < 0 \end{cases}$$

<u>*Случай 2*</u>

$$\begin{cases} a < 0 \\ f(M) > 0. \\ f(N) > 0 \end{cases}$$

Рис. 14 и 15 иллюстрируют содержание теоремы 5. Условия $f(M) < 0$ и $f(N) < 0$ при $a > 0$ гарантируют, что квадратный трехчлен $f(x)$ будет иметь два корня, причем один из них будет «левее» M, а другой «правее» N

[1] Неявно мы здесь пользуемся непрерывностью квадратичной функции $f(x) = ax^2 + bx + c$. Но понятие непрерывности в школе изучается поверхностно, поэтому достаточно сослаться на график.

(рис. 14). Условие $D > 0$ по тем же соображениям, что и в теореме 4, можно не включать в систему; оно будет выполняться автоматически.

Аналогично интерпретируются условия в Случае 2, когда $a < 0$.

Мы сформулировали пять основных теорем о расположении корней квадратного трехчлена. Конечно, можно было выписать еще целый ряд таких же теорем, но в этом нет никакой необходимости. Поняв структуру этих пяти теорем и разобравшись, как выписываются условия, отражающие то или иное расположение корней, читатель при необходимости, когда столкнется с ситуацией, не описываемой этими теоремами, сам без труда сможет сформулировать нужную систему условий. У нас это будет в задаче 16. Но следует отметить, что большинство задач, встречающихся на экзаменах, описываются этими пятью теоремами.

Применим эти теоремы к решению задач. Прежде всего решим последнюю задачу. Напомним ее формулировку:

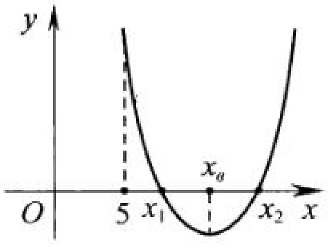


Рис. 16

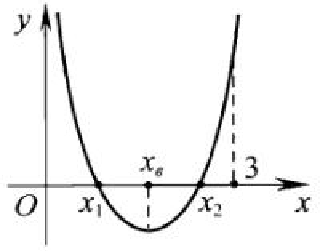


Рис. 17

Задача 10. При каких значениях параметра a корни уравнения

$$x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$$

удовлетворяют неравенству $x > 5$?

Решение. Коэффициент при x^2 положителен, поэтому ветви параболы $y = x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5$ направлены вверх. Следовательно, чтобы выполнялись условия задачи, график этой параболы должен проходить относительно точки 5 как показано на рис. 16, т. е. пересекать ось Ox в точках, лежащих на оси Ox правее точки 5. Последнее имеет место при выполнении следующих условий (теорема 2):

$$\begin{cases} D = (-2(a+1))^2 - 4(9a-5) \ge 0 \\ x_в = -\dfrac{-2(a+1)}{2} > 5 \\ f(5) = 5^2 - 2(a+1)5 + 9a - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 28a + 24 \ge 0 \\ a+1 > 5 \\ -a+10 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 28a + 24 \ge 0 \\ a+1 > 5 \\ -a+10 > 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a-6) \geq 0 \\ a > 4 \\ a < 10 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [6;\ 10).$$

Ответ: $a \in [6; 10)$.

Задача 11. При каких a корни уравнения $x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 = 0$ меньше 3.

Решение. При любом a график $f(x) = x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5$ представляет собой параболу. Но в этой задаче нам подходят параболы, лежащие «слева» от точки 3 (рис. 17). Это будет иметь место при выполнении следующих условий (теорема 1):

$$\begin{cases} D = (-2(a+1))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9a-5) \geq 0 \\ x_в = a+1 < 3 \\ f(3) = 3^2 - 2(a+1)3 + 9a - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 7a + 6 \geq 0 \\ a < 2 \\ a > \frac{2}{3} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 7a + 6 \geq 0 \\ a < 2 \\ a > \frac{2}{3} \end{cases}.$$

Решением этой системы будут $a \in \left(\frac{2}{3}; 1\right]$.

Ответ: $a \in \left(\frac{2}{3}; 1\right]$.

Решение задач на расположение корней квадратного трехчлена лучше всего начинать с того, что нарисовать параболу или несколько парабол, удовлетворяющих условиям задачи. А уже затем описать их на языке формул (равенств и неравенств).

Задача 12. При каких a корни уравнения

$$x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 = 0 \tag{10}$$

удовлетворяют условию $|x| < 6$.

Решение. Условие $|x| < 6$ равносильно $-6 < x < 6$. Следовательно, нам надо найти все a, при которых корни уравнения (10) лежат в промежутке $(-6; 6)$. Этот случай представлен на рис. 18.

Согласно теореме 3, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} D=(-2(a+1))^2-4\cdot 1\cdot (9a-5)\geq 0 \\ -6<x_в=a+1<6 \\ f(6)=6^2-2(a+1)\cdot 6+9a-5>0 \\ f(-6)=(-6)^2-2(a+1)\cdot(-6)+9a-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-7a+6\geq 0 \\ -7<a<5 \\ a<\frac{19}{3} \\ a>-\frac{43}{21} \end{cases}.$$

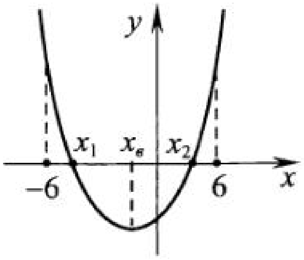


Рис. 18

Решением этой системы являются $a\in\left(-\frac{43}{21};1\right]$.

Ответ: $a\in\left(-\frac{43}{21};1\right]$.

Задача 13. Найти все значения a, при которых все корни уравнения

$$x^2-6ax+10a^2-a-4=0 \qquad (11)$$

больше a.

Прежде чем искать решение, разберемся в содержании задачи на конкретном числовом примере.

Пусть $a=2$. Тогда уравнение (11) имеет вид $x^2-12x+34=0$. Его корни $x_1=\frac{6+\sqrt{2}}{2}\approx 3.7$ и $x_2=\frac{6-\sqrt{2}}{2}\approx 2.3$ больше двух. Значит, $a=2$ является решением задачи. В общем виде: пусть a – некоторое конкретное значение параметра, x_1 и x_2 – соответствующие этому значению a корни уравнения (11). Если выполняются неравенства $x_1,\ x_2>a$, то данное значение a удовлетворяет условию нашей задачи. Все такие значения a нам и надо найти.

Принципиально эта задача ничем не отличается от предыдущих. Только в предыдущих задачах мы искали значения a, при которых корни уравнения были больше некоторого <u>конкретного</u> числа, т. е. границей было фиксированное число, а в этой задаче граница сама зависит от параметра a. Но на решении это никак не отражается.

Решение. Обозначим $y = x^2 - 6ax + 10a^2 - a - 4$. Чтобы оба корня x_1 и x_2 этого квадратного трехчлена были больше a, необходимо и достаточно выполнения следующих условий (рис. 19):

$$\begin{cases} D \ge 0 \\ x_в > a \\ y(a) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = (6a)^2 - 4(10a^2 - a - 4) \ge 0 \\ x_в = 3a > a \\ y(a) = a^2 - 6a^2 + 10a^2 - a - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -4a^2 + 4a + 16 \ge 0 \\ a > 0 \\ 5a^2 - a - 4 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - a - 4 \le 0 \\ a > 0 \\ 5(a-1)(a+\frac{4}{5}) > 0 \end{cases}.$$

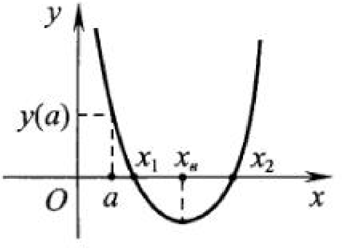


Рис. 19

Решая последнюю систему, получаем

Ответ: $a \in \left(1; \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right]$.

Решим две задачи, в которых коэффициент при x^2 зависит от параметра.

Задача 14. При каких a корни уравнения

$$(a+1)x^2 - (2a+1)x + a - 2 = 0 \qquad (12)$$

будут положительными?

Решение. Положительность корней означает, что корни уравнения больше, чем 0. В этой задаче нельзя сразу утверждать, что наше уравнение квадратное. Это зависит от коэффициента $a + 1$. <u>Случай</u> I. $a + 1 = 0$, т. е. $a = -1$. Тогда уравнение (12) принимает вид: $x - 3 = 0$, откуда $x = 3 > 0$. Следовательно, $a = -1$ удовлетворяет условию задачи. <u>Случай</u> II. $a + 1 > 0$. Тогда, наше уравнение – квадратное, и чтобы его корни были больше нуля, график функции $f(x) = (a+1)x^2 - (2a+1)x + a - 2$ должен быть расположен так, как на рис. 20 а).

Для этого необходимо и достаточно выполнение следующих условий (теорема 3).

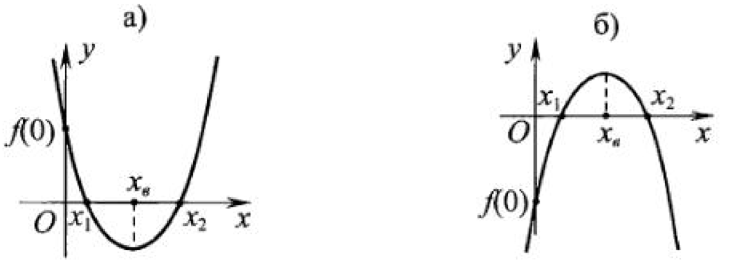


Рис. 20

$$\begin{cases} a+1>0 \\ D=(2a+1)^2-4(a+1)(a-2)\ge 0 \\ x_в=\dfrac{2a+1}{2(a+1)}>0 \\ f(0)=(a+1)\cdot 0^2-(2a+1)\cdot 0+a-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-1 \\ a\ge -\dfrac{9}{8} \\ \dfrac{2a+1}{a+1}>0 \\ a>2 \end{cases} \Leftrightarrow a>2\ .$$

<u>*Случай* III</u>. $a+1<0$. Тогда, чтобы его корни были положительными (рис. 20 б), необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

$$\begin{cases} a+1<0 \\ D=(2a+1)^2-4a^2-a-2)\ge 0 \\ x_в=\dfrac{2a+1}{2(a+1)}>0 \\ f(0)=(a+1)\cdot 0^2-(2a+1)\cdot 0+a-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<-1 \\ a\ge -\dfrac{9}{8} \\ \dfrac{2a+1}{a+1}>0 \\ a<2 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(-\dfrac{9}{8};-1\right)\ .$$

Объединив решения в случаях 1–3, получим

Ответ: $a\in\left(-\dfrac{9}{8};-1\right] \cup (2;+\infty)$.

Задача 15. При каких a один из корней уравнения

$$(a+1)x^2-(2a+1)x+a-2=0 \qquad (13)$$

положителен, а другой меньше, чем -3?

Решение. <u>*Случай* I</u>. $a+1=0$, т. е. $a=-1$. Тогда уравнение (13) имеет один корень $x=3$. Следовательно, $a=-1$ нам не подходит. <u>*Случай* II</u>. $a+1>0$. Тогда условие задачи равносильно тому, что отрезок $[0;3]$ находится между корнями (рис. 21). А для этого необходимо и достаточно выполнение следующих условий (теорема 4):

$$\begin{cases} a+1>0 \\ f(0)=(a+1)\cdot 0^2-(2a+1)\cdot 0+a-2<0 \\ f(-3)=(a+1)\cdot(-3)^2-(2a+1)\cdot(-3)+a-2<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a>-1 \\ a-2<0 \\ 16a+10<0 \end{cases}.$$

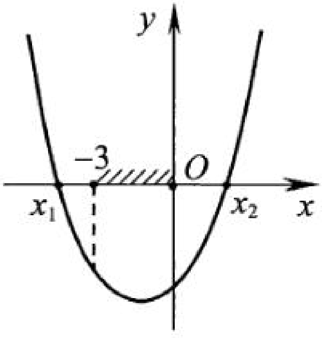


Рис. 21

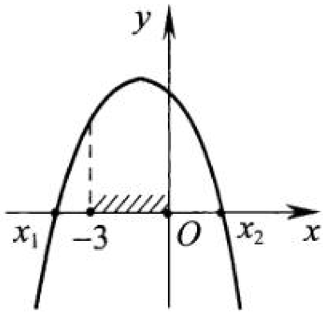


Рис. 22

Решением последней системы будут $a \in (-1; -\frac{5}{8})$

<u>*Случай* III</u>. $a+1<0$ (рис. 22). Рассуждая аналогично, имеем систему

$$\begin{cases} a+1<0 \\ f(0)=(a+1)\cdot 0^2-(2a+1)\cdot 0+a-2>0 \\ f(-3)=(a+1)\cdot(-3)^2-(2a+1)\cdot(-3)+a-2>0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \varnothing .$$

Ответ: $a \in (-1; -\frac{5}{8})$.

Напомним, что в задачах типа 15 условие $D \geq 0$ можно не включать в систему. Оно будет выполняться автоматически. Если же вы все-таки выписали его, то ничего страшного в этом нет. Вы просто решите лишнее неравенство. Ответ, естественно, будет тем же.

Задача 16. Найти все a, при которых один корень уравнения

$$x^2-2(a+1)x+9a-5=0 \qquad (14)$$

заключен в промежутке $[2; 4)$, а другой удовлетворяет неравенству $x \leq -3$.

Решение. Для этой задачи ни одна из теорем 1–4 непосредственно не подходит. Но, как мы уже говорили, поняв структуру этих теорем и решив предыдущие задачи, мы без труда сформулируем условия, при которых корни уравнения (14) будут удовлетворять нашей задаче. Нарисуем соответствующую условию задачи параболу $y = x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5$ (рис. 23, а).

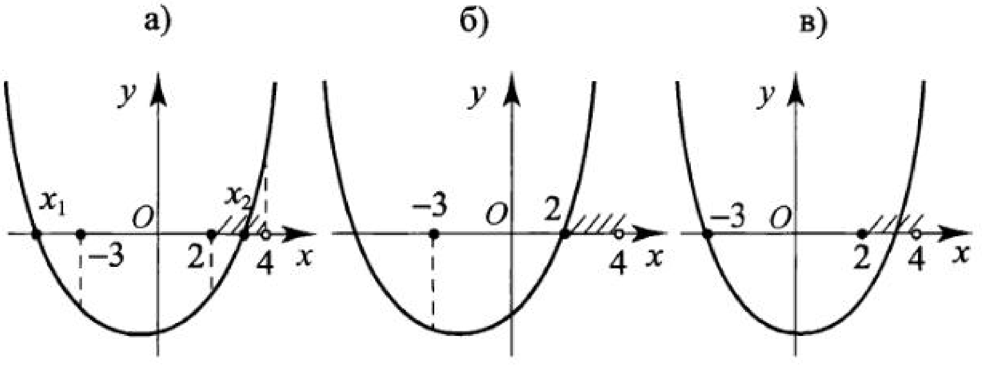


Рис. 23

Кроме того, заметим, что по условию задачи нам также подходят параболы, правая ветвь которых проходит через точку 2 (рис. 23, б), и параболы, левая ветвь которых проходит через точку -3 (рис. 23, в). Учитывая это, выпишем соответствующие условия

$$\begin{cases} f(-3) = (-3)^2 - 2(a+1)\cdot(-3) + 9a - 5 \le 0 & (15) \\ f(2) = 2^2 - 2(a+1)\cdot 2 + 9a - 5 \le 0 & (16) \\ f(4) = 4^2 - 2(a+1)\cdot 4 + 9a - 5 > 0 & (17) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 15a - 10 \le 0 \\ 5a - 5 \le 0 \\ a + 3 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-3; \frac{2}{3}].$$

Обоснование этих условий очевидно. Чтобы больший корень уравнения (14) был в промежутке $[2; 4)$, необходимо и достаточно выполнение условий (16) и (17). А чтобы меньший корень был при этом «левее» -3, должно выполняться условие (15).

Ответ: $a \in (-3; \frac{2}{3}]$.

Прежде чем переходить к следующей задаче, напомним основные определения о равносильности уравнений. Без ограничения общности можно рассматривать только уравнения вида $f(x) = 0$, поскольку в любом уравнении, перенеся все члены в левую часть, получим уравнение данного вида.

Определение 1. Уравнения $f_1(x) = 0$ и $f_2(x) = 0$ называются равносильными, если множества их решений совпадают или когда оба они не имеют решений

Например, уравнения $x^3 = 8$ и $2x = 4$ равносильны, т. к. оба имеют единственное решение $x = 2$. Аналогично, уравнения $2x^2 = 2$ и $3x^4 = 3$ также равносильны, т. к. оба имеют одно и то же множество решений $x = \pm 1$. Уравнения $x^2 = -4$ и $\frac{5}{x} = 0$ также равносильны, т. к. оба они не имеют решений (т. е. множество решений каждого – пустое множество).

Определение 2. Уравнение $f_2(x) = 0$ есть следствие уравнения $f_1(x) = 0$, если множество решений уравнения $f_1(x) = 0$ содержится в множестве решений уравнения $f_2(x) = 0$.

В этом случае также говорят, что уравнение $f_2(x) = 0$ следует из уравнения $f_1(x) = 0$.

Например, уравнение $2x^2 = 8$ следует, или есть следствие, уравнения $5x - 10 = 0$, т. к. первое уравнение имеет корни 2 и -2, второе – только число 2. Из уравнения $3x^2 = 0$ следует уравнение $\sin x = 0$, т. к. первое имеет решение $x = 0$, а второе – бесконечное множество решений $x = \pi n$, которое содержит число 0. [1]

Задача 17. При каких a из уравнения $3x - 12 = 0$ следует уравнение

$$(a + 1)x^2 - (2a + 1)x + a - 2 = 0\ ? \tag{18}$$

Решение. Уравнение $3x - 12 = 0$ имеет один корень $x = 4$. Чтобы выполнялось условие задачи, это же значение должно быть корнем уравнения (18). Подставляя $x = 4$ в (18), получаем $(a + 1)4^2 - (2a + 1)4 + a - 2 = 0$, откуда $a = -\frac{10}{9}$. Подставляя теперь обратно $a = -\frac{10}{9}$ в уравнение (18), получим квадратное уравнение $x^2 - 11x + 28 = 0$, которое имеет корнями $x_1 = 4$, $x_2 = 7$. Следовательно, $a = -\frac{10}{9}$ удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = -\frac{10}{9}$.

Наконец, решим более трудную задачу.

Задача 18. При каких значениях параметров a и b уравнение

---

[1] То, что уравнение $f_2(x) = 0$ следует из уравнения $f_1(x) = 0$, совсем не означает, что уравнение $f_2(x) = 0$ получено из уравнения $f_1(x) = 0$ с помощью каких-то преобразований. Согласно определению это означает только одно: множество решений уравнения $f_2(x) = 0$ содержит множество решений уравнения $f_1(x) = 0$.

$$x^2 + (4a + 6b + 4)x + 12ab - 4 = 0 \qquad (19)$$

имеет решения и все его решения являются решениями уравнения

$$3abx - 3a = 3b + 1. \qquad (20)$$

Сначала проанализируем задачу. Уравнение (20) линейное. А линейное уравнение, как мы видели в предыдущей главе, может иметь одно решение, ни одного, и бесконечное число. (В последнем случае решениями будут все действительные числа). Уравнение (19) – квадратное. Оно может иметь одно решение, два решения и ни одного решения. Последний вариант отпадает, т. к. по условию задачи квадратное уравнение имеет решения.

Из сказанного ясно, что нам подходят только два случая:

I. Линейное уравнение имеет решениями все $x \in R$, и при соответствующих этому случаю значениях a и b квадратное уравнение также имеет решения.

II. Линейное и квадратное уравнения имеют одно решение и эти решения совпадают.

(Случай, когда линейное уравнение не имеет решений, не подходит по условию задачи).

Реализуем сказанное и найдем искомые значения a и b.

Решение. Запишем уравнение (20) в виде $3abx = 3b + 1 + 3a$. Рассмотрим сначала первый случай, когда линейное уравнение имеет решениями $x \in R$. Это будет, если $\begin{cases} 3ab = 0 \\ 3b + 1 - 3a = 0 \end{cases}$ из первого уравнения следует либо $a = 0$, либо $b = 0$.

А) $a = 0$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем $3b + 1 = 0 \Leftrightarrow b = -\dfrac{1}{3}$.

В) $b = 0$. Тогда, используя второе уравнение системы, получаем $3 \cdot 0 + 1 + 3a = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{3}$.

Итак, уравнение (20) имеет решениями $x \in R$ в двух случаях: при $a = 0$, $b = -\dfrac{1}{3}$ и при $a = -\dfrac{1}{3}$, $b = 0$. Осталось проверить, имеет ли квадратное уравнение (19) решения при найденных a и b. При $a = 0$, $b = -\dfrac{1}{3}$ уравнение (19) имеет вид $x^2 + (4 \cdot 0 + 6 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) + 4)x - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 2x - 4 = 0$. Его дискриминант $\mathrm{D} = 2^2 - 4 \cdot (-4) = 20 > 0$. Следовательно оно имеет два корня. Поэтому, пара $a = 0$, $b = -\frac{1}{3}$ нам подходит. При $b = 0$, $a = -\frac{1}{3}$ уравнение (19) принимает вид:

$$x^2 + \left(4\cdot\left(-\tfrac{1}{3}\right) + 6\cdot 0 + 4\right)x - 4 = 0 \Leftrightarrow 3x^2 + 8x - 12 = 0.$$

Оно имеет два корня $x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{52}}{3}$. Следовательно, пара $a = -\frac{1}{3}$, $b = 0$ нам также подходит.

Во втором случае, когда линейное уравнение имеет один корень, чтобы выполнялось условие задачи, квадратное уравнение также должно иметь один корень, и эти корни должны совпадать.

Имеем $\mathrm{D} = (4a + 6b + 4)^2 - 4(12ab - 4) = 16a^2 + 36b^2 + 32a + 48b + 32$;

$$\mathrm{D} = 0 \Leftrightarrow 16a^2 + 36b^2 + 32a + 48b + 32 = 0$$

или после сокращения на 4:

$$4a^2 + 9b^2 + 8a + 12b + 8 = 0.$$

Представив $8 = 4 + 4$, получим

$$4a^2 + 8a + 4 + 9b^2 + 12b + 4 = 0 \Leftrightarrow (2a + 2)^2 + (3b + 2)^2 = 0.$$

Так как $x^2 + y^2 = 0$ только при $x = 0$ и $y = 0$ (как сумма неотрицательных чисел!), то имеем $2a + 2 = 0$ и $3b + 2 = 0$, откуда $a = -1$, $b = -\frac{2}{3}$. При этих значениях a и b уравнение (19) имеет вид:

$$x^2 + \left(4(-1) + 6\cdot\left(-\tfrac{2}{3} + 2\right)\right)x + 12(-1)\cdot\left(-\tfrac{2}{3}\right) - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = -2.$$

А уравнение (20) имеет вид $3(-1)\left(-\frac{2}{3}\right)x = 3(-1) + 3\left(-\frac{2}{3}\right) + 1 \Leftrightarrow 2x = -4 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -2$, то есть оба уравнения имеют по одному корню $x = -2$. Следовательно, пара чисел $a = -1$, $b = -\frac{2}{3}$ также удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = 0$, $b = -\frac{1}{3}$ или $a = -\frac{1}{3}$, $b = 0$ или $a = -1$, $b = -\frac{2}{3}$.

Задача 19. При всех a решить уравнение

$$(1 - a^2)x^2 + 2ax + 1 = 0. \qquad (21)$$

Решение.

Случай I. $1-a^2=0 \Leftrightarrow a=1$ или -1. В этом случае уравнение – линейное.

А) При $a=1$ имеем $0\cdot x^2+2x+1=0 \Leftrightarrow 2x+1=0 \Leftrightarrow x=-\frac{1}{2}$.

В) При $a=-1$ имеем $0\cdot x^2-2x+1=0 \Leftrightarrow -2x+1=0 \Leftrightarrow x=\frac{1}{2}$.

Случай II. $a\neq 1$, $a\neq -1$. Тогда исходное уравнение квадратное. Имеем, $D=(2a^2)-4(1-a^2)=8a^2-4$.

А) Если $D<0 \Leftrightarrow 8a^2-4<0 \Leftrightarrow a\in(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}})$, то решений нет.

В) Если $D>0 \Leftrightarrow 8a^2-4>0 \Leftrightarrow a\in(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}})\cup(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty)$, то с учетом того, что $a\neq\pm1$, уравнение (21) имеет два решения $x_1=\frac{-a-\sqrt{2a^2-1}}{1-a^2}$ и $x_2=\frac{-a+\sqrt{2a^2-1}}{1-a^2}$.

С) Если $D=0 \Leftrightarrow 8a^2-4=0 \Leftrightarrow a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ или $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ уравнение имеет один корень:

1. При $a=\frac{1}{\sqrt{2}}$ уравнение (21) принимает вид $\frac{1}{2}x^2+\sqrt{2}x+1=0$. Его единственный корень $x=-\sqrt{2}$.

2. При $a=-\frac{1}{\sqrt{2}}$ уравнение (21) имеет вид $\frac{1}{2}x^2-\sqrt{2}x+1=0$, единственный корень которого $x=\sqrt{2}$.

Ответ:

$$\left|\begin{array}{l}
\text{при } a\in(-\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}) \text{ решений нет;}\\
\text{при } a=1 \text{ решение } x=-\frac{1}{2};\\
\text{при } a=-1 \text{ решение } x=\frac{1}{2};\\
\text{при } a=\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ решение } x=-\sqrt{2};\\
\text{при } a=-\frac{1}{\sqrt{2}} \text{ решение } x=\sqrt{2};\\
\text{при } \begin{cases} a\in(-\infty;-\frac{1}{\sqrt{2}})\cup(\frac{1}{\sqrt{2}};+\infty)\\ a\neq\pm1\end{cases} \text{ решения } x_{1,2}=\frac{-a\pm\sqrt{2a^2-1}}{1-a^2}.
\end{array}\right.$$

Заключительные замечания. Эта глава является одной из самых важных при изучении задач с параметрами. Дело в том, что большинство задач в последующих главах так или иначе будут сводиться к исследованию того или иного расположения корней квадратного трехчлена. Поэтому желательно научиться свободно решать задачи этого класса, используя теоремы 1–5. Эти теоремы необходимо хорошо понять и для каждой конкретной задачи уметь сформулировать нужные условия (нужную теорему) так, как мы это делали в задачах 10–20.

Многие задачи, связанные с исследованием корней квадратного уравнения решаются с использованием теоремы Виета. Но здесь надо быть очень осторожным. При применении теоремы Виета часто появляются посторонние значения параметра. Это значения, которые не удовлетворяют «только одному условию» – при них квадратное уравнение не имеет корней. Поэтому найденные значения параметров необходимо проверять, имеются ли при них решения.

И, наконец, последнее. При исследовании всех уравнений вида $ax^2+bx+c=0$ обязательно рассматривайте случай $a=0$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. При каких a уравнение $x^2+(2a+3)x+a^2-a+5=0$ имеет решения?
2. При каких n уравнение $nx^2-(4n+3)x+5n+2=0$ имеет два различных корня?
3. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $(a+1)x^2-ax+a-3=0$ имеет не более одного решения?
4. При каких значениях параметров a, b и c уравнение $a(x^2+3x+2)+b(2x^2+x+3)+c(3x^2+2x+1)=3x^2+7x+2$ имеет более двух решений?
5. При каких a отношение корней уравнения $x^2-(3a+2)x+a^2=0$ равно 9 ?
6. Найти все значения a, при которых сумма корней уравнения $x^2-2a(x-1)-1=0$ равна сумме квадратов этих корней.
7. Найти множество значений a и b, при которых корни x_1 и x_2 уравнения $x^2+(a^2+a-13)x+4a+b+7=0$ удовлетворяют условиям $2x_1+x_2=11$ и $x_1+2x_2=10$.
8. При каком целом значении b уравнения $2x^2+(3b-1)x-3=0$ и $6x^2-(2b-3)x-1=0$ имеют общий корень?
9. При каких a уравнения $4ax^2-5x+a=0$ и $3x^2+2ax-5=0$ имеют хотя

бы один общий корень?

10. При каких a сумма квадратов корней уравнения $x^2-(a+2)x+a+9=0$ равна 10?

11. При каких a оба корня уравнения $x^2-6ax+2-2a+9a^2=0$ больше 3?

12. Найти все значения параметра c, при которых оба корня квадратного уравнения $x^2+4cx+1-2c+4c^2=0$ меньше, чем (-1).

13. Найдите все значения k, при которых один корень уравнения $x^2-(k+1)x+k^2+k-8=0$ больше 2, а другой корень меньше 2.

14. Найдите все значения k, при которых один корень уравнения $x^2-(k+1)x+k^2+k-8=0$ меньше 1, а другой корень больше 2.

15. При каких a корни уравнения $(2-a)x^2-3ax+2a=0$ больше $\frac{1}{2}$?

16. При каких a один из корней уравнения $(a^2+a+1)x^2+(2a-3)x+a-5=0$ больше 1, а другой меньше 1?

17. При каких значениях параметра a один из корней уравнения $(a-5)x^2-2ax+a-4=0$ меньше 1, а другой больше 2?

18. При каких значениях параметра a корни уравнения $(a+1)x^2-3ax+4a=0$ принадлежат интервалу $(2; 5)$?

19. При каких k корни уравнения $kx^2-(k+1)x+2=0$ будут по модулю меньше 1?

20. При каких m один из корней уравнения $x^2-(2m+1)x+m^2+m-2=0$ находится между числами 1 и 3, а второй между числами 4 и 6?

21. При всех a решить уравнение $(a^2-4)x^2+(6a+12)x+3a+6=0$.

22. При каких m корни уравнения $mx^2-2(m-1)x+3m-2=0$ отрицательны?

23. При каких a уравнение $(2-x)(x+1)=a$ имеет положительные корни?

24. При каких m корни уравнения $x^2+2x+m=0$ больше m?

25. При каких m один из корней уравнения $(m^2-1)x^2+(6m-1)x-m^4=0$ меньше m, а другой больше m?

26. Найти все значения a, при которых хотя бы один корень уравнения $x^2-2(a+1)x+9a-5=0$ больше 1.

БОЛЕЕ ТРУДНЫЕ ЗАДАЧИ

27. При каких значениях a сумма квадратов корней уравнения $x^2 + 2ax + 2a + 3 = 0$ принимает наименьшее значение?

28. Найти значения параметра a, при которых произведение корней уравнения $x^2 + 2(a-5)x + 2a^2 - 11a + 23 = 0$ принимает наименьшее значение.

29. При каких a уравнения $(1-a)x^2 + 2x - 4a = 0$ и $ax^2 - 4x + 4a = 0$ равносильны?

30. При каких значениях a уравнение $(3x^2 - 2(4a-3)x + 5a^2 - 10a)\sqrt{x+7} = 0$ имеет ровно два решения?

31. При каких a корни x_1, x_2 уравнения $x^2 + ax + 1 = 0$ таковы, что $(\frac{x_1}{x_2})^2 + (\frac{x_2}{x_1})^2 < \frac{5}{2}$.

32. При каких целых значения n корни уравнения $nx^2 + (2n-1)x + n - 2 = 0$ рациональны?

Глава 4

КВАДРАТНЫЕ НЕРАВЕНСТВА

Прежде всего разберемся в структуре решений квадратных неравенств вида:

$$ax^2 + bx + c > 0\,, \tag{1}$$

$$ax^2 + bx + c \geq 0\,, \tag{2}$$

$$ax^2 + bx + c < 0\,, \tag{3}$$

$$ax^2 + bx + c \leq 0\,, \tag{4}$$

т. е. выясним, что представляет собой множество решений этих неравенств при разных a, b и c. Проще всего это сделать по графикам, нарисовав графики квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ при различных a, b и c.

Рассмотрим сначала случай $a > 0$. Тогда у параболы $y = ax^2 + bx + c$ ветви направлены вверх.

Если график квадратного трехчлена пересекает ось Ox в двух различных точках x_1 и x_2 (рис. 1), то решением неравенства (1) будут два бесконечных промежутка $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$. Решением неравенства (2) будут те же промежутки, но с включенными точками x_1 и x_2, т. е. $(-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$. Решением неравенства (3) будет промежуток $(x_1; x_2)$, а неравенства (4) – тот же промежуток, но с включенными точками x_1 и x_2.

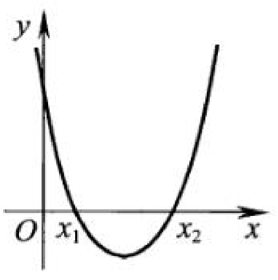


Рис. 1

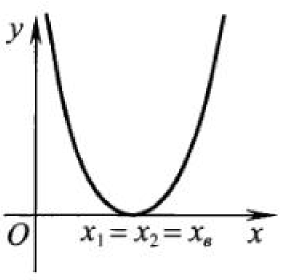


Рис. 2

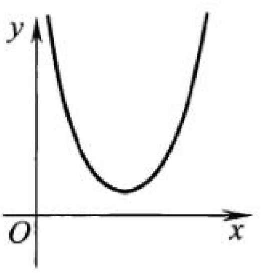


Рис. 3

Если график квадратного трехчлена $ax^2 + bx + c$ касается оси Ox (рис. 2) (в этом случае $\mathrm{D} = b^2 - 4ac = 0$ и $x_1 = x_2 = x_в$), то решением неравенства (1) будут два промежутка $(-\infty; x_в) \cup (x_в; +\infty)$. Решением неравенства (2) будут все действительные числа. Неравенство (3) не будет иметь решений. Наконец, неравенство (4) будет иметь решением одну точку $x = x_в$.

Если график квадратного трехчлена не имеет общих точек с осью Ox (рис. 3), то неравенства (1) и (2) будут иметь решениями все действительные числа, а неравенства (3) и (4) не будут иметь решений. Таким образом мы видим, что решениями квадратного неравенства при $a > 0$ могут быть:

1) $\varnothing$ – пустое множество;

2) одна точка;

3) замкнутый или открытый промежуток $[x_1; x_2]$ или $(x_1; x_2)$;

4) $(-\infty; x_1]\cup[x_2; +\infty)$ или $(-\infty; x_1)\cup(x_2; +\infty)$ - два бесконечных промежутка;

5) все действительные числа.

Случай $a < 0$ ничего нового к решениям квадратных неравенств не добавляет. На рис. 4–6 представлены графики квадратного трехчлена $y = ax^2 + bx + c$ при $a < 0$. Аналогичные рассуждения показывают, что при $a < 0$ решениями квадратных неравенств являются те же множества, что и в случае $a > 0$.

Итак, решениями квадратных неравенств (1)-(4) при разных a, b и c могут быть только множества, перечисленные в пунктах 1) – 5).

Ясно, что запоминать этот вывод дословно не имеет смысла. (Все не запомнишь!) Но представлять, в каком случае будет то или иное множество решений, – необходимо.

В целом решение квадратных неравенств с параметрами представляет

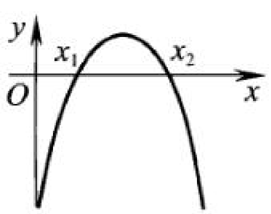


Рис. 4

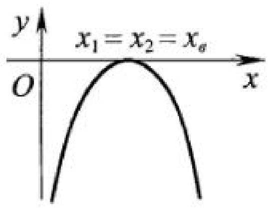


Рис. 5

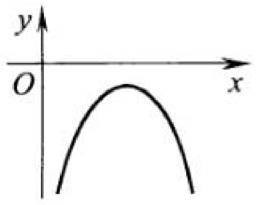


Рис. 6

для школьников бо́льшие трудности, нежели решение уравнений. Во-первых, при решении неравенств приходится разбирать больше случаев, чем для уравнений, и школьники часто упускают некоторые из них. Во-вторых, при решении неравенств с параметрами зачастую приходится проводить более тонкие логические рассуждения, чем при решении уравнений.

Рассмотрим примеры.

Задача 1. При каких значениях a неравенство

$$x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 > 0 \qquad (5)$$

выполняется при всех значениях x.

Решение. Нарисуем $y = x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5$ - график квадратного трехчлена. В зависимости от знака дискриминанта возможны три варианта: $D > 0$, $D = 0$ и $D < 0$ (рис. 7–9).

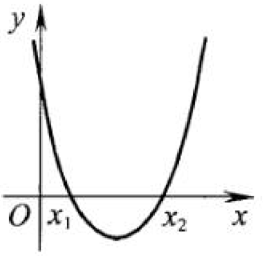


Рис. 7 $D > 0$

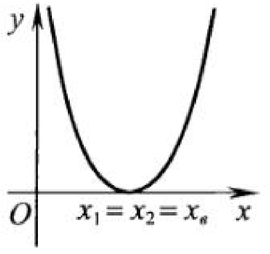


Рис. 8 $D = 0$

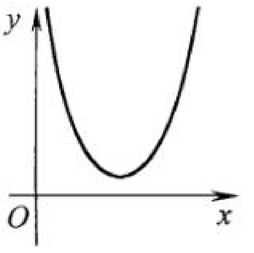


Рис. 9 $D < 0$

Нам надо отобрать те параболы, у которых при всех x значение $y = x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 > 0$. Ясно, что парабола на рис. 7 нам не подходит, т. к. в интервале $(x_1; x_2)$ значение $y < 0$. Также нам не подходит парабола на рис. 8, т. к. в точке $x_в$ значение $y = 0$. А парабола на рис. 9 нам подходит, т. к. при всех x значение $y > 0$. Теперь, «переводя» график на рис. 9 на язык формул, получаем:

$$D = (-2(a+1))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9a - 5) < 0 \Leftrightarrow a^2 - 7a + 6 < 0 \Leftrightarrow a \in (1; 6).$$

Ответ: $a \in (1; 6)$.

Замечание. Задачу 1 можно переформулировать так: дано квадратное неравенство $x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 > 0$. Найти все a, при которых его решениями будут все действительные числа. И теперь ответ сразу следует из нашего исследования структуры решений квадратного неравенства в начале главы.

Задача 2. При каких a неравенство

$$x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 > 0 \tag{6}$$

не выполняется ни для одного значения x.

Решение. В этой задаче воспользуемся теми же графиками квадратного трехчлена $y = x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5$ на рис. 7–9. Итак, нам надо найти такие параболы, у которых ни при каком x не выполняется $y > 0$.

Парабола на рис. 7 не удовлетворяет условию задачи, т. к. при $x \in (-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$ выполняется $y > 0$. Парабола на рис. 8 нам также не подходит, т. к. при $x \in (-\infty;\ x_в) \cup (x_в;+\infty)$, выполняется $y > 0$. И, наконец, график на рис. 9 также не подходит, т. к. при всех $x \in R$ значение $y > 0$.

Ответ: таких a нет.

Задачу 2 можно переформулировать так: дано квадратное неравенство $x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 > 0$. Найти все a, при которых оно не имеет решений. Ясно, что таких a нет, поскольку, как мы говорили в начале этой главы, неравенство $ax^2 + bx + c > 0$ при $a > 0$ всегда имеет решения.

Задача 3. При каких p неравенство

$$(2p+3)x^2 - 2px + p - 2 \geq 0 \qquad (7)$$

1) выполняется при всех x; 2) не выполняется ни для одного значения x; 3) выполняется ровно для одного значения x.

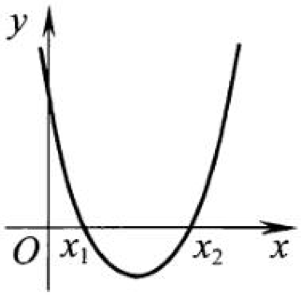


Рис. 10 $2p + 3 > 0, D > 0$

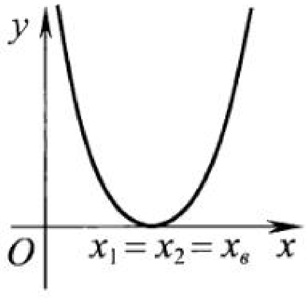


Рис. 11 $2p + 3 > 0, D > 0$

Решение.

Рассмотрим сначала ответ на первый вопрос задачи.

При x^2 в данном неравенстве стоит выражение $2p + 3$, которое может быть положительным, равным 0 и отрицательным.

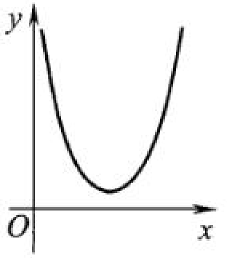


Рис. 12 $2p + 3 > 0, D < 0$

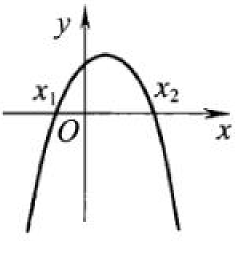


Рис. 13 $2p + 3 < 0, D > 0$

Случай I. Если $2p + 3 = 0$, т. е. $p = -\frac{3}{2}$, то подставляя это значение в исходное неравенство, получаем $3x - \frac{7}{2} \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{7}{6}$. Следовательно, при $p = -\frac{3}{2}$ исходное неравенство выполняется лишь при $x \in \left[\frac{7}{6}; +\infty\right)$. А при $x \in \left(-\infty; \frac{7}{6}\right)$ оно не выполняется. Поэтому $p = -\frac{3}{2}$ условию задачи не удовлетворяет.

Случай II. Если $2p + 3 \neq 0$, то в левой части неравенства (7) стоит квадратный трехчлен. Нарисуем его график. В зависимости от знака $2p + 3$ его ветви будут направлены вверх или вниз, и в зависимости от того, $D > 0$, $D = 0$ или $D < 0$, график будет пересекать ось Ox, касаться ее или не иметь общих точек с осью Ox. Все эти случаи представлены на рис. 10–15.

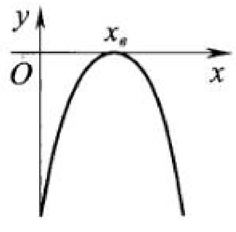


Рис. 14 $2p + 3 < 0, D = 0$

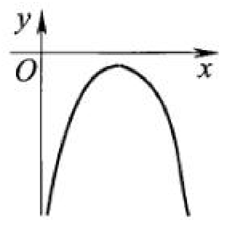


Рис. 15 $2p + 3 < 0, D < 0$

Для ответа на первый вопрос нам надо выбрать такие параболы, у которых ордината y при любых значениях x неотрицательна. Очевидно, что нам подходят только параболы на рис. 11 и 12, когда парабола расположена над осью Ox или касается ее. Это имеет место при $D < 0$ и $D = 0$. Объединяя $D < 0$ и $D = 0$ в одно неравенство, получаем систему:

$$\begin{cases} 2p+3>0 \\ D=(-2p)^2-4(2p+3)(p-2)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} p>-\frac{3}{2} \\ 4p^2-4p-24\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow p\geq 3.$$

Параболы, у которых ветви направлены вниз, нам не подходят (обоснуйте почему?). Следовательно, ответом на первый вопрос задачи будут $p \in [3; +\infty)$.

Найдем ответ на второй вопрос задачи.

Очевидно, что $p=-\frac{3}{2}$ условию задачи не удовлетворяет, т. к. при этом значении p исходное неравенство выполняется при $x \geq \frac{7}{6}$, а по условию задачи не должно выполняться ни для одного значения x.

Итак, $2p+3 \neq 0$. Опять, сначала выберем параболы, которые удовлетворяют условию задачи. Очевидно, нам не подходят параболы, у которых ветви направлены вверх, потому что у них всегда есть значения x, при которых $y \geq 0$. Далее, нам не подходит парабола на рис. 13, т. к. при всех x из промежутка $[x_1; x_2]$ значения $y \geq 0$. Нам не подходит и график на рис. 14, т. к. при $x = x_в$ значение $y = 0$, т. е. исходное неравенство в этой точке выполняется, а по условию задачи не должно выполняться. А вот график на рис. 15 нам подходит, т. к. неравенство $y = (2p+3)x^2 - 2px + p - 2 \geq 0$ не выполняется ни при одном x. Итак, имеем систему

$$\begin{cases} 2p+3<0 \\ \mathrm{D}=(-2p)^2-4(2p+3)(p-2)<0 \end{cases} \Leftrightarrow p<-2.$$

Ответом на второй вопрос задачи будут $p \in (-\infty; -2)$.

Наконец, найдем ответ на третий вопрос задачи.

Случай $2p+3=0$, очевидно нам тоже не подходит.

Если $2p+3 \neq 0$, то легко видеть, что параболы, ветви которых направлены вверх (рис. 10–12) не удовлетворяют условию задачи, т. к. неравенство $y \geq 0$ будет выполняться при бесконечном числе значений x. Нам также не подходит парабола на рис. 13. А вот парабола на рис. 14 нам подходит, т. к. только для одной точки $x = x_в$ будет выполняться $y \geq 0$.

И наконец, парабола, изображенная на рис. 15, также не удовлетворяет условию задачи, т. к. нет ни одной точки, в которой значение $y \geq 0$.

Переходя от графика на рис. 14 на «язык формул», получаем систему:

$$\begin{cases} \mathrm{D}=(-2p)^2-4(2p+3)(p-2)=0 \\ 2p+3<0 \end{cases}.$$

Решением уравнения $\mathrm{D}=0$ будут $p=3$ и $p=-2$. Условию $2p+3<0$ удовлетворяет только $p=-2$. Это и есть ответ на третий вопрос задачи.

Ответ: 1) $p \in [3; +\infty)$; 2) $p \in (-\infty; -2)$; 3) $p=-2$.

Задача 4. При каких a неравенство

$$\frac{x^2+(2a-1)x+8-9a}{2x^2-3x+3} \le 1 \tag{8}$$

выполняется при всех x.

Решение. Так как у квадратного трехчлена $2x^2 - 3x + 3$ дискриминант $D = (-3)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 2 < 0$, то он положителен при всех x. Следовательно, умножив обе части неравенства (8) на выражение $2x^2 - 3x + 3$, получим равносильное неравенство $x^2 + (2a - 1)x + 8 - 9a \le 2x^2 - 3x + 3$. Раскрыв скобки и перенеся все члены в левую часть, получим:

$$x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5 \ge 0. \tag{9}$$

Итак, исходная задача свелась к следующей задаче: при каких a неравенство (9) выполняется при любых x. А это есть уже решенная нами Задача 1. Проведя все те же выкладки, получим

Ответ: $a \in (1; 6)$.

Только что мы рассмотрели ряд задач, в которых требовалось найти значения параметра, при котором квадратное неравенство имеет решениями либо все $x \in R$, либо одну точку, либо не имеет решений вовсе. И как мы видели решение этих задач определялось знаком дискриминанта и знаком коэффициента при x^2.

Перейдем к более трудным задачам, в которых требуется найти значение параметров, при которых неравенство выполняется на некотором множестве отличном от R.

Задача 5. При каких a неравенство

$$x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5 > 0 \tag{10}$$

выполняется при всех $x < 2$.

Разберем эту задачу подробно, чтобы были ясно видны все случаи, которые необходимо рассматривать при решении таких задач. Как мы увидим, решение этой задачи в принципиальной своей части сведется к поиску нужного нам расположения параболы относительно точки $x = 2$.

Решение. Нарисуем график $y = x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5$. В зависимости от a он может быть выше оси Ox, касаться ее и иметь с ней две общие точки. При этом, если парабола $y = x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5$ имеет общие точки x_1 и x_2 с осью Ox, то они могут быть слева от точки $x = 2$, справа, и точка $x = 2$ может быть между x_1 и x_2. Нарисуем графики для всех этих случаев (рис. 16–21).

Я советую на первых порах, пока нет опыта решения задач с параметрами, рисовать все возможные случаи расположения парабол относительно данных в задаче величин, а не пытаться представить их мысленно. Это, конечно, приведет к построению достаточно большого числа графиков, но зато позволит не пропустить ни одного важного для решения задачи случая. К сожалению, часто бывает так: школьник нашел правильную идею решения задачи, но не рассмотрел один из случаев, и получает за задачу «минус».

Случай I. Если график $y = x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5$ находится выше оси Ox (рис. 16), то очевидно, что $y > 0$ при всех $x \in R$, и в частности, при $x < 2$. А как мы уже не раз говорили, условием того, что график находится выше оси Ox, является условие $D < 0$. Имеем $D = 4a^2 - 28a + 24 < 0 \Leftrightarrow a \in (1;\ 6)$. Таким образом, часть решений мы нашли.

Случай II. Парабола пересекает ось Ox в двух точках. Чтобы увидеть все возможные варианты расположения такой параболы относительно точки 2, лучше всего представить себе, что парабола «движется слева направо» вдоль оси Ox. Сначала обе точки пересечения находятся левее точки 2 (рис. 17), затем правая ветвь проходит через точку 2 (рис. 18), затем точка 2 становится между точками пересечения (рис. 19), потом левая ветвь проходит через точку 2 (рис. 20), и, наконец, обе точки пересечения становятся правее точки 2 (рис. 21). Мы видим пять принципиально возможных вариантов расположения парабол.

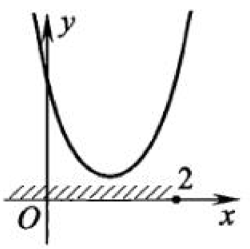


Рис. 16

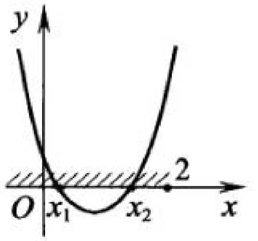


Рис. 17

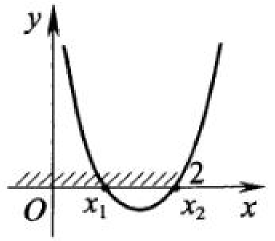


Рис. 18

Очевидно, что парабола на рис. 17 нам не подходит, т. к. на промежутке $[x_1;\ x_2]$ значение $y \leq 0$. Аналогично, нам не подходят параболы на рис. 18 и 19 (обоснуйте, почему!). А вот, парабола на рис. 21 нам подходит, т. к. при всех $x < 2$ значение $y > 0$. Нам также подходит парабола на рис. 20: хотя в самой точке 2 имеем $y(2) = 0$, но при всех $x < 2$ значение $y > 0$.

Перейдем теперь с языка графиков на язык формул, которые и позволят найти требуемые a.

Парабола на рис. 21 характеризуется тем, что ее корни находятся правее точки 2. А это имеет место, если выполняются условия:

$$\text{I.}\ \begin{cases} D > 0 \\ x_в > 2 \\ y(2) > 0 \end{cases}.$$

Парабола на рис. 20 характеризуется тем, что меньший из ее корней ра-

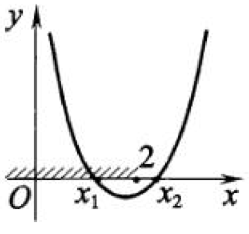


Рис. 19

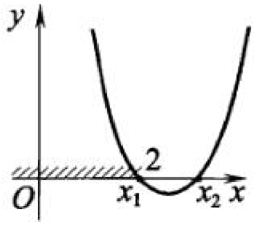


Рис. 20

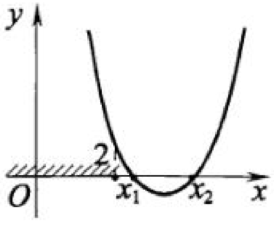


Рис. 21

вен 2. А это выполняется тогда и только тогда, когда

$$\text{II.}\ \begin{cases} D > 0 \\ x_в > 2 \\ y(2) = 0 \end{cases}.$$

<u>*Случай*</u> <u>III</u>. Рассмотрим теперь случай касания параболы оси Ox. Возможны три принципиально различных варианта расположения такой параболы относительно точки 2. Вершина параболы находится левее точки 2; в точке 2; правее точки 2 (рис. 22–24). Рассуждая как и ранее, видим, что парабола на рис. 22 не удовлетворяет условиям задачи, а параболы на рис. 23 и 24 – удовлетворяют.

Переходя в очередной раз с языка графиков на язык формул, получаем две системы:

$$\text{III.}\ \begin{cases} D = 0 \\ x_в = 2 \end{cases} \quad \text{и} \quad \text{IV.}\ \begin{cases} D = 0 \\ x_в > 2 \end{cases}.$$

Решив полученные системы I–IV (что не займет более десяти минут), мы найдем все значения a, удовлетворяющие условиям задачи. (Проделайте

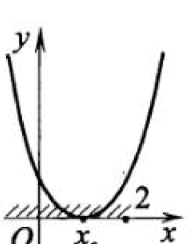


Рис. 22

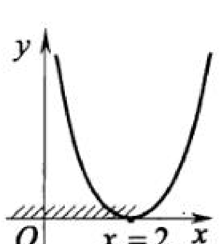


Рис. 23

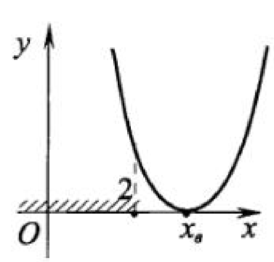


Рис. 24

это самостоятельно как полезное упражнение).

Но можно все эти четыре системы объединить в одну систему, которая содержит решения всех четырех систем и только их:

$$\begin{cases} D \ge 0 \\ x_в \ge 2 \\ y(2) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = (-2(a+1))^2 - 4\cdot 1\cdot(9a-5) \ge 0 \\ x_в = a+1 \ge 2 \\ y(2) = 2^2 - 2(a+1)\cdot 2 + 9a - 5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 24a + 28 \ge 0 \\ a \ge 1 \\ 5a - 5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} (a-1)(a-6) \ge 0 \\ a \ge 1 \\ a \ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow a = 1 \text{ или } a \in [6; +\infty).$$

Вспоминая Случай I, получаем окончательный

Ответ: $a \in [1; +\infty)$.

Замечание 1. Если еще раз посмотреть на решение этой задачи, то легко увидеть, что нам подошли только параболы, которые находятся над осью Ox (в этом случае неравенство выполнялось вообще при всех x) и параболы, которые пересекали ось Ox вне множества $x < 2$ (в крайнем случае, проходили через саму точку $x = 2$). Примерно такая же картина будет иметь место при исследовании всех неравенств этого типа.

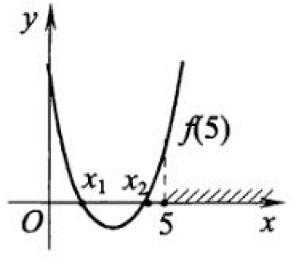


Рис. 25

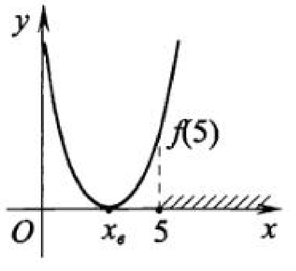


Рис. 26

Замечание 2. Со временем, когда вы освоите исследование неравенств с параметрами, вы научитесь сразу рисовать нужную параболу и объединять несколько случаев в один. Но на первых порах лучше подробно рассматривать все возможные случаи расположения парабол относительно заданного в условии задачи множества, и лишь затем, если представляется возможным, объединять некоторые случаи в один. Это даст вам возможность избежать ошибок.

Задача 6. При каких a неравенство

$$x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 > 0$$

выполняется при всех $x \ge 5$?

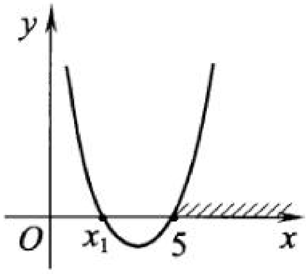


Рис. 27

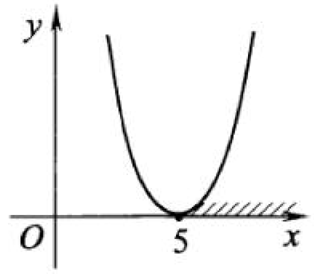


Рис. 28

Решение этой задачи аналогично предыдущей. Нарисуем параболу $y = x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5$.

Случай I. Очевидно, если парабола $y = x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5$ находится над осью Ox (рис. 3), то наше неравенство выполняется для всех $x \in R$ и, в частности, для $x \geq 5$. Поскольку парабола не имеет общих точек с осью Ox при $D < 0$, имеем:

$$D = (-2(a + 1))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9a - 5) < 0 \Leftrightarrow a \in (1; 6).$$

Случай II. Если парабола имеет с осью Ox общие точки, то нам подходят только параболы, изображенные на рис. 25 и 26, когда корни квадратного трехчлена меньше 5.

Проверьте сами, что никакие другие случаи расположения корней квадратного трехчлена относительно точки $x = 5$ нам не подходят. (В этой задаче случай, когда больший корень равен 5 или оба совпадающих корня равны 5 (рис. 27 и 28), не удовлетворяют условию задачи, т. к. тогда $y(5) = 0$, а по условию задачи должно быть строго $y(5) > 0$.)

Итак, нам надо найти условия, при которых корни квадратного трехчлена $y = x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5$ меньше 5. Это имеет место, если:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ x_в < 5 \\ y(5) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = (-2(a+1))^2 - 4 \cdot 1 \cdot (9a-5) \geq 0 \\ x_в = a + 1 > 5 \\ y(5) = 5^2 - 2(a+1) \cdot 5 + 9a - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [6; +\infty).$$

Вспоминая случай I, имеем

Ответ: $a \in (1; 10)$.

Задача 7. При каких a неравенство

$$-x^2 + 2(a + 1)x - 9a + 5 > 0 \qquad (11)$$

выполняется при всех x, удовлетворяющих условиям $1 < x \leq 4$?

Решение. Умножив обе части неравенства (11) на (–1), получим равносильное неравенство:

$$x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 < 0\,. \tag{12}$$

Итак, нам надо найти все a, при которых неравенство (12) выполняется при всех x из промежутка $(1;\,4]$. Как обычно, нарисуем график квадратного трехчлена $y = x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5$.

Очевидно, что нам не подходят параболы, находящиеся над осью Ox, т. к. ни при одном x не выполняется неравенство $y < 0$. По тем же соображениям нам не подходят параболы, касающиеся оси Ox.

Из парабол, пересекающих ось Ox в двух точках, нам подходят только те, у которых промежуток $(1;\,4]$ находится между корнями x_1 и x_2 (рис. 29).

И сразу же посмотрим, подходят ли нам параболы, проходящие через точки $x = 1$ или $x = 4$ (рис. 30 и 31).

Очевидно, что случай, изображенный на рис. 30, нам не подходит, т. к. $y(4) = 0$, а должно быть по условию задачи $y(4) < 0$. А случай на рис. 31 нам подходит. Никакое другое расположение корней квадратного трехчлена относительно промежутка $(1;\,4]$ нам не подходит.

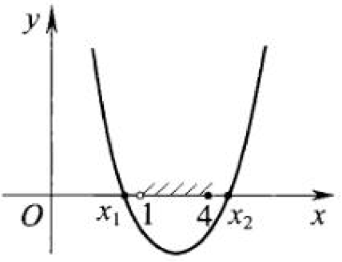


Рис. 29

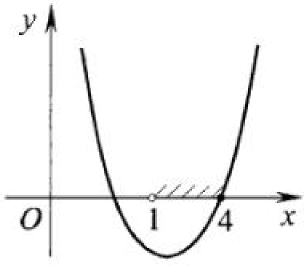


Рис. 30

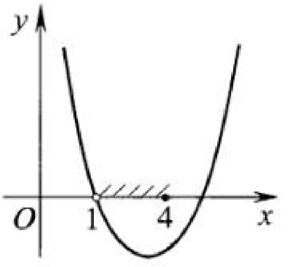


Рис. 31

Объединяя теперь случаи на рисунках 18 и 20, имеем систему:

$$\begin{cases} y(1) \le 0 \\ y(4) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(1) = 1^2 - 2(a+1)\cdot 1 + 9a - 5 \le 0 \\ y(2) = 2^2 - 2(a+1)\cdot 2 + 9a - 5 < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \le \frac{6}{7}.$$

Ответ: $a \in (-\infty;\,\frac{6}{7}]$.

Задача 8. При каких a неравенство

$$(4 - a^2)x^2 + (a+2)x - 1 \le 0 \tag{13}$$

выполняется для всех x, удовлетворяющих условию $|\,x\,| \ge 3$?

Решение. Решая неравенство $|x|\geq 3$, получаем $x \in (-\infty;\ -3]\cup$ $\cup[3;\ +\infty)$. Итак, нам надо найти все a, при которых неравенство (13) будет выполняться для всех x из указанного множества. Так как в этой задаче коэффициент при x^2 зависит от параметра, необходимо будет разобрать три случая: $4-a^2=0$, $4-a^2>0$ и $4-a^2<0$.

Случай I. $4-a^2=0 \Leftrightarrow a=\pm 2$.

При $a=-2$ неравенство (13) принимает вид: $0\cdot x^2+0\cdot x-1\leq 0 \Leftrightarrow -1\leq 0$. Его решениями будут $x\in(-\infty;\ +\infty)$. Следовательно, $a=-2$ удовлетворяет условию задачи.

При $a=2$, неравенство (13) имеет вид:

$$0\cdot x^2+4x-1\leq 0 \Leftrightarrow x\leq \frac{1}{4}. \tag{14}$$

Т. е. наше неравенство выполняется только для $x\leq\frac{1}{4}$. Следовательно, $a=2$ условию задачи не удовлетворяет.

Случай II. $4-a^2>0$. Тогда решением неравенства (13) будет либо пустое множество, либо одна точка, либо промежуток $[x_1;\ x_2]$. Ни в одном из этих случаев неравенство не будет выполняться для всех $x\in(-\infty;\ -3]\cup[3;\ +\infty)$. Следовательно, случай 2 нам не подходит.

Случай III. $4-a^2<0$. Тогда ветви параболы $y=(4-a^2)x^2+(a+2)x-1$ направлены вниз.

А) Если парабола находится под осью Ox (I) или касается ее (II) (рис. 32), то такие параболы нам подходят. Следовательно, имеем:

$$\begin{cases}4-a^2<0\\ \mathrm{D}\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}a^2-4>0\\ \mathrm{D}=(a+2)^2-4(4-a^2)(-1)\leq 0\end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a\in(-\infty;-2)\cup a\in\left[\frac{10}{3};+\infty\right).$$

В) Если парабола $y=(4-a^2)x^2+(a+2)x-1$ пересекает ось Ox в двух точках, то нам подходит только случай, изображенный на рис. 33, когда корни трехчлена находятся между числами 3 и –3 (возможно совпадая с ними).

Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда:

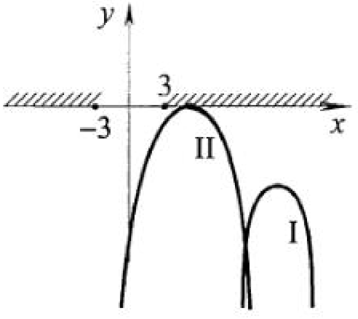


Рис. 32

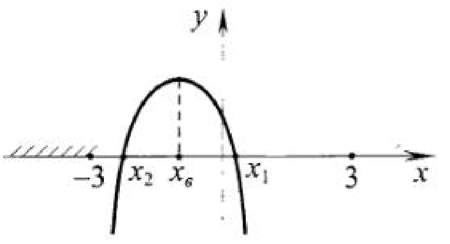


Рис. 33

$$\begin{cases} 4-a^2<0 \\ D>0 \\ -3<x_в<3 \\ y(-3)\le 0 \\ y(3)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-4>0 \\ D=(a+2)^2-4(4-a^2)(-1)>0 \\ -3<-\frac{a+2}{2(4-a^2)}<3 \\ y(-3)=(4-a^2)(-3)^2+(a+2)(-3)-1\le 0 \\ y(3)=(4-a^2)\cdot 3^2+(a+2)3-1\le 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a\in\left[\frac{1+\sqrt{165}}{6};\frac{10}{3}\right).$$

Собирая вместе все найденные решения, получаем

Ответ: $a\in(-\infty;-2]\cup\left[\frac{1+\sqrt{165}}{6};+\infty\right)$.

Прежде чем перейти к следующим задачам, напомним основные определения о равносильности неравенств. Не нарушая общности, можно рассматривать только неравенства вида $f(x)<0$, т. к., перенеся все члены в произвольном неравенстве в левую часть, получим неравенство данного вида.

Определение 1. Неравенства $f_1(x)<0$ и $f_2(x)<0$ называются равносильными, если множества их решений совпадают или оба они не имеют решений.

Равносильность неравенств обозначается так:

$$f_1(x)<0 \Leftrightarrow f_2(x)<0. \qquad (15)$$

Например, неравенства $3x-12<0$ и $5x-20<0$ равносильны, т. к. решением обоих неравенств является множество $(4;+\infty)$.

Неравенства $x^2<-4$ и $|x|<-3$ также равносильны, поскольку оба не имеют решений.

Определение 2. Неравенство $f_2(x) < 0$ есть следствие неравенства $f_1(x) < 0$ (обозначение: $f_1(x) < 0 \Rightarrow f_2(x) < 0$), если множество решений неравенства $f_1(x) < 0$ содержится в множестве решений неравенства $f_2(x) < 0$.

В этом случае также говорят, что из неравенства $f_1(x) < 0$ следует неравенство $f_2(x) < 0$.

Например, из неравенства $3x - 15 > 0$ следует неравенство $2x - 6 >0$, т. к. решением первого неравенства будет множество $(5; +\infty)$, а решением второго $(3; +\infty)$. Ясно, что множество $(5; +\infty)$ содержится в множестве $(3; +\infty)$.

Аналогично, неравенство $x^2 - 4 \geq 0$ есть следствие неравенства $2x + 4 \leq 0$, т. к. решением первого неравенства есть множество $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$, а решением второго – множество $(-\infty; -2]$. В этом примере можно сказать также, что из неравенства $2x + 4 \leq 0$ следует неравенство $x^2 - 4 \geq 0$.

Так же, как и в случае уравнений, заметим, что фраза «из неравенства $f_1(x) < 0$ следует неравенство $f_2(x) < 0$», совсем не означает, что неравенство $f_2(x) < 0$ получается из неравенства $f_1(x)$ исключительно с помощью каких-то преобразований (хотя это не исключается). Она означает только одно: множество решений неравенства $f_2(x)$ шире (или совпадает) с множеством решений неравенства $f_1(x) < 0$.

Более подробно о равносильности неравенств можете прочесть в [7].

Сейчас мы рассмотрим ряд задач с параметрами, сформулированных в терминах равносильности и следствий неравенств, и покажем, что по существу это абсолютно те же задачи, которые мы ранее разбирали в этой главе, только по-другому сформулированные.

Задача 9. При каких a из неравенства $x < 2$ следует неравенство

$$x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5 > 0 . \qquad (16)$$

Решение. Согласно определению следствия неравенств условие задачи «из неравенства $x < 2$ следует неравенство $x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5 > 0$» означает, что множество $x < 2$ содержится в множестве решений неравенства (16). А это означает, что неравенство (16) выполняется для всех $x < 2$.

Итак, наша задача свелась к следующей: найти все значения параметра a, при которых неравенство $x^2 - 2(a + 1)x + 9a - 5 > 0$ выполняется для всех $x < 2$.

Если теперь посмотреть внимательно, последняя формулировка задачи 9 есть не что иное, как решенная нами в начале главы Задача 5. Проводя теперь все те же выкладки что и в задаче 5, получаем

Ответ: $a \in [1; +\infty)$.

Из сказанного ясно, что задача 9 есть просто по-другому сформулированная задача 5.

Задача 10. При каких a из неравенства

$$x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 > 0 \qquad (17)$$

следует неравенство $x < 2$?

Решение. В этой задаче неравенства поменялись местами. Итак, нам надо найти все a, при которых множество решений неравенства (17) содержатся в множестве $x < 2$. Но множество решений неравенства (17) есть либо $(-\infty; x_1) \cup (x_2; +\infty)$, либо R. Ни первое, ни второе множества не содержится в одном бесконечном луче $x < 2$.

Ответ: таких a нет.

Задача 11. При каких a из неравенства $\frac{x-4}{x-1} \le 0$ следует неравенство

$$-x^2 + 2(a+1)x - 9a + 5 > 0\ ? \qquad (18)$$

Решение. Умножив обе части неравенства (18) на (–1), получим равносильное неравенство

$$x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 < 0\,. \qquad (19)$$

Решением неравенства $\frac{x-4}{x-1} \le 0$ является множество $x \in (1; 4]$. По условию задачи множество $(1; 4]$ должно принадлежать множеству решений неравенства (19). То есть условие задачи можно сформулировать так: при каких a неравенство $x^2 - 2(a+1)x + 9a - 5 < 0$ выполняется для всех x, удовлетворяющих неравенству $1 < x \le 4$. А это, очевидно, есть решенная нами Задача 7. Проделав все те же выкладки что и в задаче 7, получим

Ответ: $a \in (-\infty; \frac{6}{7}]$.

Задача 12. При всех a решить неравенство

$$(1-a^2)x^2+2ax+1\geq 0\,. \qquad (20)$$

Идея решения данного неравенства проста. При $1-a^2=0$ данное неравенство линейное и его мы рассмотрим отдельно. При $1-a^2\neq 0$ неравенство квадратное. Его решениями при $D<0$ будут либо $x\in R$ либо $\varnothing$ (в зависимости от знака $1-a^2$). А при $D\geq 0$ решениями будет либо отрезок $[x_1; x_2]$ либо объединение двух бесконечных лучей $(-\infty; x_1]\cup[x_2; +\infty)$, что также зависит от знака $1-a^2$.

Хотя идея решения и достаточно простая, однако выкладки будут достаточно «внушительными». Это связано с тем, что выражения для корней x_1 и x_2 квадратного трехчлена в левой части нашего неравенства весьма громоздки. Кроме того, в зависимости от знака дискриминанта D и знака коэффициента $1-a^2$ нам придется разбирать большое число случаев и подслучаев. Это потребует от нас быть предельно внимательными.

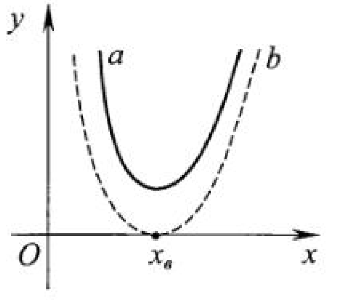


Рис. 34

Решение. <u>Случай I</u>. $1-a^2=0\Leftrightarrow a=1$ или $a=-1$. При $a=1$ исходное неравенство имеет вид: $0\cdot x^2+2\cdot 1\cdot x+1\geq 0\Leftrightarrow 2x+1\geq 0$. Его решениями будут $x\geq -\frac{1}{2}$. При $a=-1$ исходное неравенство принимает вид:

$0\cdot x^2+2\cdot(-1)\cdot x+1\geq 0\Leftrightarrow -2x+1\geq 0$. Его решениями будут $x\leq\frac{1}{2}$.

<u>Случай II</u>. $1-a^2>0\Leftrightarrow a\in(-1; 1)$. При этих значениях a ветви параболы $y=(1-a^2)x^2+2ax+1$ направлены вверх. Дискриминант квадратного трехчлена равен $D=(2a)^2-4\,(1-a^2)\cdot 1=4a^2-4+4\,a^2=8a^2-4$.

А) Если $D<0$, то парабола находится над осью Ox (рис. 34).

В) Если $D=0$, парабола касается оси Ox. В том и другом случаях решениями исходного неравенства будут $x\in R$.

Итак, при $D\leq 0\Leftrightarrow 8a^2-4\leq 0\Leftrightarrow a\in\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]$ <u>решениями будут $x\in R$</u>.

C) Если $D > 0$ и x_1, x_2 – корни квадратного трехчлена $y = (1 - a^2)x^2 + 2ax + 1$, причем x_1 – меньший корень, а x_2 – больший, то решением исходного неравенства будут $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$ (рис. 35). Имеем: $D = 8a^2 - 4 > 0 \Leftrightarrow a^2 - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \left(a - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(a + \frac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$. Учитывая, что $a \in (-1; 1)$, находим $a \in (-1; -\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}}; 1)$ (рис. 36). При этих значениях a корни квадратного трехчлена равны:

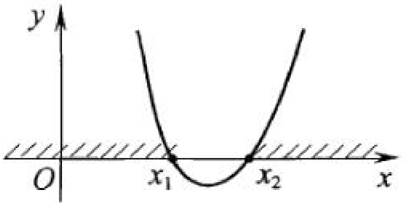


Рис. 35

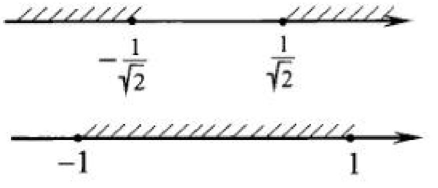


Рис. 36

$$x_1 = \frac{-2a - \sqrt{8a^2 - 4}}{2(1 - a^2)} = \frac{-a - \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2} \quad \text{и} \quad x_2 = \frac{-a + \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}.$$

Так как $1 - a^2 > 0$, то $x_1 < x_2$ (обоснуйте, почему!). Следовательно, решениями будут $x \in \left(-\infty; \frac{-a - \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}\right] \cup \left[\frac{-a + \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}; +\infty\right)$.

<u>*Случай* III</u>. $1 - a^2 < 0 \Leftrightarrow a^2 - 1 > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$. При этих a дискриминант $D = 8a^2 - 4$ всегда положителен. Ветви параболы направлены вниз, следовательно, решениями будут все x, лежащие между корнями квадратного трехчлена $y = (1 - a^2)x^2 + 2ax + 1$ (рис. 37).

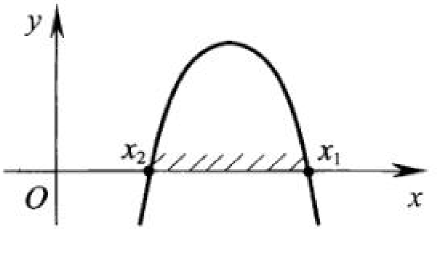


Рис. 37

Корни x_1 и x_2 будут те же: $x_1 = \frac{-a - \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}$ и $x_2 = \frac{-a + \sqrt{2a^2 - 1}}{1 - a^2}$. Но теперь $x_2 < x_1$, поскольку $1 - a^2 < 0$. Следовательно, в Случае 3 решением неравенства будет промежуток $[x_2; x_1]$ (рис. 37). Итак, при $a \in (-\infty; -1) \cup$ $\cup (1; +\infty)$ решениями будут $x \in \left[\frac{-a+\sqrt{2a^2-1}}{1-a^2}; \frac{-a-\sqrt{2a^2-1}}{1-a^2}\right]$.

Ответ:

$$\left[\begin{array}{l} \text{при } a=1 \text{ решениями являются } x \geq -\frac{1}{2}; \\ \text{при } a=-1 \text{ решениями являются } x \leq \frac{1}{2}; \\ \text{при } a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty) \text{ решения } x \in \left[\frac{-a+\sqrt{2a^2-1}}{1-a^2}; \frac{-a-\sqrt{2a^2-1}}{1-a^2}\right]; \\ \text{при } a \in (-1;-\frac{1}{\sqrt{2}}) \cup (\frac{1}{\sqrt{2}};1) \text{ решения } x \in \left(-\infty; \frac{-a-\sqrt{2a^2-1}}{1-a^2}\right] \cup \left[\frac{-a+\sqrt{2a^2-1}}{1-a^2}; +\infty\right); \\ \text{при } a \in \left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right] \text{ решениями являются } x \in R. \end{array}\right.$$

Заключительные замечания. В данной главе мы рассмотрели четыре основных типа задач для квадратных неравенств с параметрами.

Первый тип – это задачи 1–4, в которых требовалось найти значения параметра, при котором данное неравенство: 1) выполняется для всех $x \in R$; 2) выполняется ровно для одного значения $x \in R$; 3) не выполняется ни для одного значения $x \in R$. Решение этих задач основывалось на исследовании знака дискриминанта и знака коэффициента при x^2.

Второй тип – это задачи, в которых задано некоторое множество M, отличное от R, и нам требуется найти значения параметров, при которых данное квадратное неравенство выполняется на множестве M. Основной подход к их решению – нахождение нужного расположения корней квадратного трехчлена относительно множества M, а затем, используя теоремы 1–5 предыдущей главы, описать найденное расположение корней на языке неравенств. Решение этих неравенств и позволяет найти требуемые значения параметров.

Третий тип – это задачи о равносильности и следствиях неравенств. По существу, это задачи второго типа, только иначе сформулированные. Для их решения требуется «обратная переформулировка», т. е. необходимо выделить в явном виде множество M, на котором должно выполняться данное в условии задачи неравенство.

И, наконец, четвертый тип – это задачи, в которых надо решить квадратное неравенство при всех значениях параметров (задача 12).

Хорошо разобравшись в структуре и решениях этих четырех типов задач, вы без труда решите и иные задачи, связанные с квадратными неравенствами с параметрами. Некоторые из них предложены в задачах для самостоятельного решения.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Найти все значения a, при которых следующие неравенства выполняются при всех x:

1. $4x^2-(2a+1)x+2a^2+a+1>0$; 2. $-x^2+3ax+a^2-3a+11>0$.

3. Найти все значения параметра a, при которых неравенство $(a-3)x^2-2ax+3a-6\geq 0$ выполняется:

   a) при всех значениях x ;

   b) только при одном значении x ;

   c) хотя бы при одном значении x ;

   d) ни при каком значении x неравенство не выполняется.

4. Найти все значения a, при которых неравенство $x^2+2(a+1)x+3a+13>0$ выполняется для любых $x\leq -1$.

5. При каких значениях a неравенство $t^2+2(2a+1)t+4a^2-3>0$ выполняется для всех $t>0$?

6. Найти все a, при которых неравенство $x^2-2ax-a^2+a+6<0$ выполняется при всех x из промежутка $[0;\ 2]$.

7. При каких значениях m неравенство $2x^2+(m-1)x+m^2+6(m-1)\leq x^2-x-6$ выполнено при всех $1<x<2$?

8. При каких значениях параметра a неравенство $ax^2-4x+3a+1>0$ выполняется при всех значениях $x>0$?

9. Найти все a, при которых любое значение x, удовлетворяющее неравенству $ax^2+(1-a^2)x-a>0$, по модулю не превосходит двух.

10. При каких значениях a неравенство $a(x+1)^2>x^2+3x+3$ выполнено хотя бы при одном значении $x<1$?

11. Найти все значения a, при которых неравенство $6ax^2+(8a+8)x+3a+6\leq 0$:

    а) выполняется при всех $x\in(-\infty;-1]$;

    б) не выполняется ни для одного $x\in(-\infty;-1]$.

12. При каких значениях m:

а) из неравенства $x > 1$ следует неравенство $x^2 - (3m+1)x + m > 0$;

б) обратно, при каких значениях m из неравенства

$x^2 - (3m+1)x + m > 0$; следует неравенство $x > 1$?

13. При каких a из неравенства $ax^2 - x + 1 - a < 0$ следует неравенство $0 < x < 1$?

14. Найти все a, при которых из неравенства $x^2 - a(1+a^2)x + a^4 < 0$ следует неравенство $x^2 + 4x + 3 < 0$.

15. При каких a неравенство $(x-a)(x-a-2) > 0$ является следствием неравенства $x^2 - 4x + 3 < 0$?

16. При всех a решить неравенство $(a^2 - 1)x - 2ax + 1 < 0$.

17. При каких значениях a множеством решений неравенства $x^2 - 2ax - 3 \le 0$ будет отрезок длины 4 ?

БОЛЕЕ ТРУДНЫЕ ЗАДАЧИ

18. При каких значениях a:

а) из неравенства $x^2 - 22x + 85 \le 0$ следует неравенство

$2x^2 - (2a+4)x + 9a - 10 \le 0$;

b) обратно, при каких a из неравенства $2x^2 - (2a+4)x + 9a - 10 \le 0$

следует неравенство $x^2 - 22x + 85 \le 0$;

c) при каких a эти неравенства равносильны?

19. При каких k из неравенства $x \le 1$ следует неравенство $1 - kx^2 \ge 0$; при каких k из неравенства $1 - kx^2 \ge 0$ следует неравенство $x \le 1$; при каких k эти неравенства равносильны?

20. При каких значениях a система неравенств

$$\begin{cases} x^2 - (3a+1)x + 2a^2 + 3a - 2 \le 0 \\ x^2 - 5ax + 6a^2 + a - 1 \le 0 \end{cases}$$ имеет решения?

21. При всех b решить неравенство $(b^2 - 4)x^2 - 4bx - 4 \le 0$.

22. При каких значениях b неравенство

$x^2 + (2a+4b)x + 2a^2b + 4b^2 - 2ab - 6b + 15 \le 0$ не имеет решений ни при одном значении a ?

Глава 5

ЗАДАЧИ, СВОДЯЩИЕСЯ К ИССЛЕДОВАНИЮ КВАДРАТНОГО ТРЕХЧЛЕНА

§ 1. УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

В этой главе мы рассмотрим показательные, логарифмические, алгебраические и тригонометрические уравнения и неравенства, которые непосредственной заменой переменной приводятся к квадратным.

Мы объединили все эти задачи независимо от типа исходного уравнения или неравенства в отдельную главу, поскольку для их решения существует единый подход. Подробному изучению этого подхода и посвящена настоящая глава.

Для понимания материала этой главы необходимо знание основных свойств и характеристик показательной, логарифмической и тригонометрической функций. В частности, необходимо знать область определения, множество значений, промежутки возрастания, убывания этих функций, а также уметь решать простейшие уравнения и неравенства, включающие эти функции. Тем, кто забыл что-то из сказанного выше, я советую повторить соответствующие разделы по школьному учебнику. (Это можно сделать по мере чтения данной главы.) Если же вы не изучали какие-то из этих тем, то соответствующие задачи, или даже всю главу, можно пропустить без ущерба для понимания последующего материала и вернуться к ней потом.

И, наконец, перед тем, как перейти к задачам, сделаем одно, важное для понимания дальнейшего изложения, замечание.

Пусть дана функция $f(x)$, заданная на некотором множестве X. Вопрос, который нас интересует, при каких значениях t уравнение $f(x) = t$ имеет решения, а при каких t не имеет? Ответ простой.

Уравнение $f(x) = t$ имеет решения тогда и только тогда, когда t принадлежит множеству значений E функции $f(x)$.

Например, уравнение $\sin x = t$ имеет решения, если t принадлежит промежутку $[-1;\ 1]$, который и является множеством значений функции $f(x) = \sin x$. Аналогично, множеством значений функции $f(x) = 2^x$ является промежуток $(0;\ +\infty)$. Поэтому уравнение $2^x = t$ имеет решения только при значениях t, принадлежащих этому промежутку.

В общем виде это утверждение проиллюстрировано на графике (рис. 1).

Область определения функции $f(x)$ – промежуток $[a;b]$. Множество значений $f(x)$ – промежуток E (на рис. 1 он выделен на оси Ot жирной линией).

Если $t_1 \in E$, то как видно из графика, имеется значение $x_1 \in [a;b]$, такое, что $t_1 = f(x_1)$. Это и означает, что уравнение $f(x) = t_1$ имеет решением x_1.

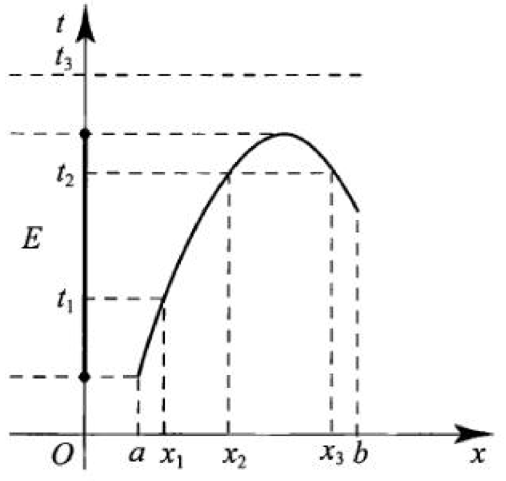


Рис. 1

Для значения $t_2 \in E$ имеются даже два значения x_2 и x_3, в которых выполняется равенство $t_2 = f(x)$. Это означает, что уравнение $t_2 = f(x)$ имеет два решения.

Если взять $t_3 \notin E$ (рис. 1), то по графику видно, что уравнение $t_3 = f(x)$ решений не имеет.

Перейдем к задачам.

Задача 1. При каких a уравнение

$$25^x - 2(a+1)\cdot 5^x + 9a - 5 = 0 \tag{1}$$

имеет два корня? Найти эти корни.

Прежде, чем решать данную задачу в общем виде, попробуем «почувствовать» ее решение на конкретных примерах. Возьмем несколько числовых значений и, подставив их вместо a, попытаемся при этих значениях a решить уравнение [1].

1) $a = 2$. Тогда уравнение (1) принимает вид

$$25^x - 6\cdot 5^x + 13 = 0. \tag{2}$$

[1] Этот прием часто применяется при решении различных задач с параметрами (и не только с параметрами). Если не видно решения задачи сразу в общем виде, то подставляют некоторые произвольные числовые значения и пытаются решить задачу при данных значениях параметров. И на этих частных примерах пытаются увидеть («схватить») решение задачи в общем виде.

Обозначив $t = 5^x$, получим $t^2 - 6t + 13 = 0$. Последнее уравнение корней не имеет, т. к. $D < 0$. Следовательно, уравнение (2) также не имеет корней.

2) $a = -3$. Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$25^x + 4 \cdot 5^x - 32 = 0. \tag{3}$$

Обозначив, как и ранее, $5^x = t$, получим уравнение $t^2 + 4t - 32 = 0$. Решая его, находим $t_1 = -8$, $t_2 = 4$. Осталось решить два уравнения: $5^x = -8$ и $5^x = 4$. Уравнение $5^x = -8$ решений не имеет, т. к. $5^x > 0$ при любом x. Уравнение $5^x = 4$ имеет единственное решение уравнения $x = \log_5 4$.

Напомним, что при всех x неравенство $5^x > 0$ выполняется. Множество значений функции $t = 5^x$ есть промежуток $(0; +\infty)$. Поэтому уравнение $5^x = t$ при $t \le 0$ решений не имеет, а при $t > 0$ имеет единственное решение $x = \log_5 t$.

3) $a = 10$. Тогда уравнение (1) принимает вид:

$$25^x - 22 \cdot 5^x + 94 = 0.$$

Обозначив $5^x = t$, получаем $t^2 - 22t + 94 = 0 \Rightarrow t_1 = 11 - \sqrt{27},\ t_2 = 11 + \sqrt{27}$.

Легко видеть, что оба значения t_1 и t_2 – положительны. Поэтому имеем:

$$1)\ 5^x = 11 - \sqrt{27} \Rightarrow x_1 = \log_5(11 - \sqrt{27});$$

$$2)\ 5^x = 11 + \sqrt{27} \Rightarrow x_2 = \log_5(11 + \sqrt{27}).$$

Таким образом, при $a = 10$ наше уравнение имеет два корня. Если теперь проанализировать решения всех этих частных случаев, то легко сделать следующие выводы.

1. Если после замены $5^x = t$ полученное квадратное уравнение не имеет решений, то и исходное уравнение также не имеет решений.

2. Если квадратное уравнение имеет один положительный корень и один отрицательный или равный 0, то исходное уравнение имеет только один корень.

3. Если квадратное уравнение имеет два отрицательных корня (у нас такой случай не встретился), то исходное уравнение не будет иметь решений (объясните, почему!).

4. И, наконец, если квадратное уравнение имеет два положительных корня, то и исходное уравнение имеет два корня.

Перейдем теперь к решению задачи 1 в общем виде.

Решение. Обозначим $t = 5^x$. Тогда уравнение (1) примет вид:

$$t^2-2(a+1)t+9a-5=0\,. \tag{4}$$

Из предыдущих рассуждений ясно: чтобы исходное уравнение имело два корня, необходимо и достаточно, чтобы квадратное уравнение (4) имело два положительных корня t_1 и t_2. (В этом случае каждое из уравнений $5^x=t_1$ и $5^x=t_2$ будет иметь по одному корню и эти корни будут: $x_1=\log_5 t_1$ и $x_2=\log_5 t_2$.)

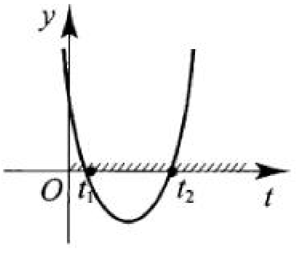


Рис. 2

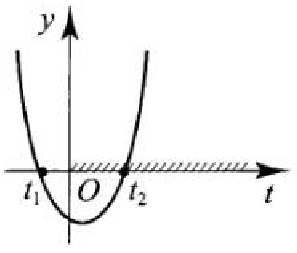


Рис. 3

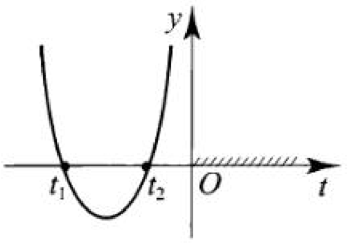


Рис. 4

Итак, исходная задача свелась к следующей: при каких a квадратное уравнение $t^2-2(a+1)t+9a-5=0$ имеет два корня $t_1,\ t_2>0$?

Решение таких задач мы подробно разбирали в главе 3. Наш случай имеет место, если (рис. 2):

$$\begin{cases} \mathrm{D}>0 \\ t_{\text{в}}>0 \\ f(0)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{D}=(-2(a+1))^2-4\cdot1\cdot(9a-5)>0 \\ t_{\text{в}}=a+1>0 \\ f(0)=0^2-2(a+1)\cdot0+9a-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2-28a+24>0 \\ a+1>0 \\ 9a-5>0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow a\in\left(\frac{5}{9};1\right)\cup(6;+\infty)\,.$$

Итак, мы нашли, что при $a\in\left(\frac{5}{9};1\right)\cup(6;+\infty)$ исходное уравнение имеет два корня. Найдем теперь сами корни. Для этого сначала найдем корни t_1 и t_2 уравнения (4). Имеем

$$t_1=\frac{2(a+1)-\sqrt{4a^2-28a+24}}{2}=a+1-\sqrt{a^2-7a+6}\,,$$

$$t_2=a+1+\sqrt{a^2-7a+6}\,.$$

Следовательно,

1) $5^x=a+1-\sqrt{a^2-7a+6} \Leftrightarrow x_1=\log_5(a+1-\sqrt{a^2-7a+6})$;

2) $5^x=a+1+\sqrt{a^2-7a+6} \Leftrightarrow x_2=\log_5(a+1+\sqrt{a^2-7a+6}$.

Ответ: при $a \in \left(\frac{5}{9};1\right) \cup (6;+\infty)$ исходное уравнение имеет два корня $x_1 = \log_5(a+1-\sqrt{a^2-7a+6})$, $x_2 = \log_5(a+1+\sqrt{a^2-7a+6})$.

Продолжим исследование нашего показательного уравнения, начатое в задаче 1.

Задача 2. При каких a уравнение

$$25^x - 2(a+1)5^x + 9a - 5 = 0 \tag{5}$$

a) имеет ровно один корень, найти его;

b) не имеет корней.

Решение. Обозначив $5^x = t$, получаем:

$$t^2 - 2(a+1)t + 9a - 5 = 0. \tag{6}$$

Найдем ответ на вопрос а) задачи.

Из предыдущих рассуждений ясно: чтобы исходное уравнение имело один корень, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (6) имело ровно один положительный корень. Это возможно в двух случаях.

A) Уравнение (6) имеет ровно один корень и этот корень положительный.

B) Уравнение (6) имеет два корня: один положительный, а другой отрицательный или равный 0.

Рассмотрим оба эти случая.

A) Квадратное уравнение имеет один корень, если $D = 0$. Имеем

$$D = 4a^2 - 28a + 24 = 0 \Leftrightarrow a = 1 \text{ или } a = 6.$$

Подставляя $a = 1$ в уравнение (6), получаем $t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 2$.

Подставляя $a = 6$ в уравнение (6), получаем $t^2 - 14t + 49 = 0 \Rightarrow t_1 = t_2 = 7$.

Таким образом, при $a = 1$ и при $a = 6$ квадратное уравнение имеет один положительный корень. Следовательно, при каждом из них исходное уравнение имеет одно решение:

$$\text{при } a = 1 \quad t_1 = t_2 = 2 \Rightarrow 5^x = 2 \Rightarrow x = \log_5 2;$$

$$\text{при } a = 6 \quad t_1 = t_2 = 7 \Rightarrow 5^x = 7 \Rightarrow x = \log_5 7.$$

B) Найдем теперь все a, при которых уравнение (6) имеет один корень отрицательный или равный нулю , а другой – положительный, т. е. $t_1 \le 0$, $t_2 > 0$. Чтобы воспользоваться теоремой 4 (глава 3), рассмотрим отдельно:

I. $t_1 < 0, t_2 > 0$ и II. $t_1 = 0, t_2 > 0$.

<u>Случай</u> I. $t_1 < 0$, $t_2 > 0$ имеет место тогда и только тогда (рис. 3), когда

$$f(0)<0 \Leftrightarrow f(0)=0^2-2(a+1)\cdot 0+9a-5<0 \Leftrightarrow a<\frac{5}{9}.$$

При этих значениях a квадратное уравнение (6) имеет только один положительный корень. Найдем его. Квадратное уравнение (6) имеет два корня:

$$t_1=a+1-\sqrt{a^2-7a+6} \text{ и } t_2=a+1+\sqrt{a^2-7a+6}.$$

Но нам подходит только больший корень t_2, т. к. только $t_2>0$. Вспоминая, что $t=5^x$, имеем:

$$5^x=a+1+\sqrt{a^2-7a+6} \Leftrightarrow x=\log_5(a+1+\sqrt{a^2-7a+6}).$$

Следовательно, при $a<\frac{5}{9}$ исходное уравнение имеет один корень $x=\log_5(a+1+\sqrt{a^2-7a+6})$.

<u>*Случай* II</u>. $t_1=0$, $t_2>0$. Раз $t_1=0$ – корень уравнения (6), то подставляя его в это уравнение, найдем соответствующие значения a. Имеем $0^2-2(a+1)\cdot 0+9a-5=0 \Leftrightarrow a=\frac{5}{9}$.

Таким образом, уравнение (6) имеет корень $t=0$ лишь при $a=\frac{5}{9}$. Теперь осталось проверить, что при $a=\frac{5}{9}$ второй корень положительный. Подставляя $a=\frac{5}{9}$ в уравнение (6), получаем:

$$2(\frac{5}{9}+1)+9\cdot\frac{5}{9}-5=0 \Leftrightarrow t^2-\frac{28}{9}t=0 \Leftrightarrow t_1=0, \quad t_2=\frac{28}{9}>0.$$

Приравнивая $5^x=\frac{28}{9}$, находим корень $x=\log_5\frac{28}{9}$.

Итак, мы получили:

1) при $a=1$, $x=\log_5 2$;

2) при $a=6$, $x=\log_5 7$;

3) при $a=\frac{5}{9}$, $x=\log_5\frac{28}{9}$;

4) при $a<\frac{5}{9}$, $x=\log_5(a+1+\sqrt{a^2-7a+6})$.

Это ответ на вопрос а) задачи. Однако, если заметить, что при подстановке $a=1$, $a=6$, $a=\frac{5}{9}$ в формулу $x=\log_5(a+1+\sqrt{a^2-7a+6})$, мы будем последовательно получать $x=\log_5 2$, $x=\log_5 7$ и $x=\log_5\frac{28}{9}$, то наш ответ можно записать короче:

при $a = 1$, $a = 6$, $a \le \frac{5}{9}$, $x = \log_5(a+1+\sqrt{a^2-7a+6})$.

Дадим ответ на вопрос b) задачи.

Уравнение (5) не имеет решений в двух случаях:

1. если квадратное уравнение (6) не имеет решений;

2. если квадратное уравнение имеет решения t_1 и $t_2 \le 0$. (В этом случае оба уравнения $5^x = t_1$ и $5^x = t_2$ не будут иметь решений.)

Случай 1 имеет место, когда $D < 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 28a + 24 < 0 \Leftrightarrow a \in (1;6)$.

Случай 2 имеет место, если (рис. 4):

$$\begin{cases} D \ge 0 \\ t_в \le 0 \\ f(0) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 4a^2 - 28a + 24 \ge 0 \\ t_в = a + 1 \le 0 \\ f(0) = 0^2 - 2(a+1)\cdot 0 + 9a - 5 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \varnothing .$$

Ответ: $\left|\begin{array}{l} \text{при } a \in \left(-\infty; \frac{5}{9}\right] \cup \{1,6\} \text{ решение } x = \log_5(a+1+\sqrt{a^2-7a+6}); \\ \text{при } a \in (1;6) \text{ решений нет.} \end{array}\right.$

Итак, в задачах 1 и 2 мы выяснили, при каких a уравнение (5) имеет два решения, одно решение и не имеет решений. Как мы видели, все зависело от того, сколько положительных корней имело квадратное уравнение (6). Если теперь заметить, что множество положительных чисел $(0;+\infty)$ есть множество значений функции $t = 5^x$, то последний вывод можно сформулировать так: число решений уравнения (5) зависит от того, сколько корней квадратного уравнения (6) принадлежат множеству значений $(0;+\infty)$ функции $t = 5^x$. Если оба корня t_1 и t_2 принадлежат этому множеству, то исходное уравнение имеет два корня; если один корень принадлежит этому множеству, то исходное уравнение имеет только один корень. Если же ни один из корней t_1 и t_2 не принадлежит этому множеству, то исходное уравнение корней не имеет. Аналогичная картина, как мы увидим далее, имеет место для всех уравнений этого вида.

Задача 3. Найти все a, при которых уравнение

$$25^{x^2} - 2(a+1)5^{x^2} + 9a - 5 = 0 \qquad (7)$$

имеет четыре решения.

Решение. Обозначим $t = 5^{x^2}$. Тогда исходное уравнение примет уже привычный вид:

$$t^2 - 2(a+1)t + 9a - 5 = 0 . \qquad (8)$$

Областью значений функции $t=5^{x^2}$ является промежуток $[1;+\infty)$. (Функция x^2 меняется от 0 до $+\infty$. Следовательно, 5^{x^2} будет меняться от 1 до $+\infty$).

Рассмотрим сначала уравнение $5^{x^2}=t$.

1. При $t=1$ это уравнение имеет одно решение $5^{x^2}=1 \Leftrightarrow x^2=0 \Leftrightarrow x=0$.

2. При $t>1$ справедливо $\log_5 t>0$. Поэтому уравнение $5^{x^2}=t$ имеет два решения $5^{x^2}=t \Leftrightarrow x^2=\log_5 t \Leftrightarrow x_{1,2}=\pm\sqrt{\log_5 t}$.

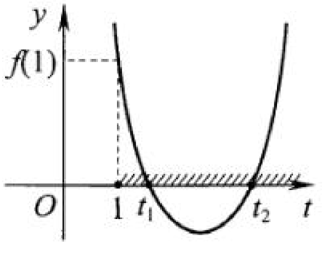


Рис. 5

Следовательно, исходное уравнение имеет четыре решения, если квадратное уравнение (8) имеет два корня t_1 и $t_2>1$.

А это будет (рис. 5), если:

$$\begin{cases} D>0 \\ t_в=a+1>1 \\ f(1)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=(-2(a+1))^2-4\cdot1\cdot9a-5>0 \\ t_в=a+1>1 \\ f(1)=1^2-2(a+1)\cdot1+9a-5>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2-7a+6>0 \\ a>0 \\ 7a-6>0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$a\in(\frac{6}{7};1)\cup(6;+\infty).$$

Ответ: при $a\in(\frac{6}{7};1)\cup(6;+\infty)$ уравнение имеет четыре решения.

Сказанное в предыдущих трех задачах очевидным образом обобщается на произвольное уравнение с параметрами, сводящееся заменой переменной, к квадратному.

Например, пусть нам надо найти все a, при которых уравнение

$$f^2(x)-2(a+1)f(x)+9a-5=0 \qquad (9)$$

имеет решения, где $f(x)$ – некоторая функция, областью значений которой является промежуток $[m; M]$. Обозначим $t=f(x)$. Тогда уравнение (9) примет вид:

$$t^2 - 2(a+1)t + 9a - 5 = 0 . \tag{10}$$

Чтобы исходное уравнение (9) имело решения, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы один из корней квадратного уравнения (10) лежал в промежутке $[m; M]$.

Рассмотрим еще примеры, которые по существу лишь иллюстрируют разобранную выше схему.

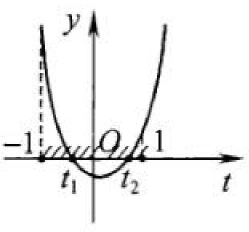


Рис. 6

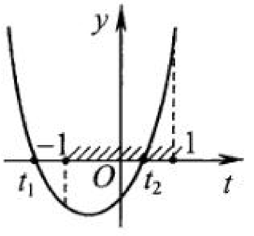


Рис. 7

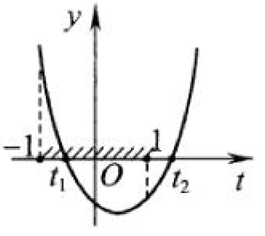


Рис. 8

Задача 4. При каких a уравнение

$$\cos^2 x - 2(a-4)\sin x + 4a - 13 = 0 \tag{11}$$

имеет решения?

Решение. Заменяя $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$, приведём уравнение (11) к виду

$$\sin^2 x + (2a-4)\sin x + 12 - 4a = 0 .$$

Обозначим $\sin x = t$. Тогда уравнение (11) примет вид

$$t^2 + (2a-4)t + 12 - 4a = 0 . \tag{12}$$

Значения функции $t = \sin x$ изменяются в промежутке от -1 до 1. Следовательно, чтобы исходное уравнение (11) имело решения, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (12) имело хотя бы один из корней (или оба корня) в промежутке $[-1; 1]$. Рассмотрим эти случаи. Обозначим $f(t) = t^2 + (2a-4)t + 12 - 4a$.

<u>Случай</u> I. Оба корня t_1 и t_2 принадлежат промежутку $[-1; 1]$ (рис. 6). Это имеет место тогда и только тогда, когда:

$$\begin{cases} D \ge 0 \\ -1 \le t_в = -a + 2 \le 1 \\ f(-1) \ge 0 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [2\sqrt{2}; \frac{17}{6}] .$$

Случай II. Больший корень t_2 принадлежит промежутку $[-1;\ 1]$, а меньший – нет (рис. 7). Это имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(1) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 17 > 0 \\ 2a - 9 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (\frac{17}{6}; 4{,}5]\ .$$

Случай III. Меньший корень t_1 принадлежит промежутку $[-1;\ 1]$, а больший – нет (рис. 8). Этот случай имеет место тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases} f(-1) \ge 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a - 17 \le 0 \\ 2a - 9 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \varnothing\,.$$

Объединяя случаи 1 и 2, получаем

Ответ: уравнение имеет решения при $a \in \left[2\sqrt{2};\ 4{,}5\right]$.

Задача 5. При каких a уравнение

$$\lg^2 \sin 3x + (a+1)\log_{0,1} \sin^2 3x + 9a - 5 = 0$$

имеет решения? Найти их.

Решение. Воспользовавшись свойствами логарифмов, приведем исходное уравнение к виду:

$$\lg^2 \sin 3x - 2(a+1)\lg \sin 3x + 9a - 5 = 0\,.$$

Обозначив $t = \lg \sin 3x$, получим уже привычное квадратное уравнение

$$t^2 - 2(a+1)t + 9a - 5 = 0\,. \qquad (13)$$

Найдем область значений t. Функция $\sin 3x$ меняется от -1 до 1. Поскольку логарифмы отрицательных чисел не существуют, рассмотрим значения x, при которых $0 < \sin 3x \le 1$. При этих x функция $\lg \sin 3x$ меняется в промежутке от $-\infty$ до 0 (т. е. есть область значений функции $t = \lg \sin 3x$ есть промежуток $(-\infty; 0]$).

Теперь, как и ранее, исходное уравнение имеет решения, если квадратное уравнение (13) имеет хотя бы один корень в промежутке $(-\infty; 0]$.

Возможны два варианта:

1. оба корня принадлежат этому промежутку;
2. только меньший корень ему принадлежит.

Обозначим $f(t) = t^2 - 2(a+1)t + 9a - 5$.

Случай 1 имеет место (рис. 9), если $\begin{cases} D \ge 0 \\ t_в \le 0 \\ f(0) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \varnothing.$

Случай 2 имеет место (рис. 10), если $f(0) \le 0 \Leftrightarrow 9a - 5 < 0 \Leftrightarrow a \le \frac{5}{9}$.

Итак, мы нашли, что исходное уравнение имеет решения при $a \le \frac{5}{9}$. В этом случае только меньший корень квадратного уравнения (13) принадлежит множеству $(-\infty; 0]$. Следовательно, чтобы определить корни исходного уравнения, надо найти корни t_1 и t_2 уравнения (13) и затем решить уравнение $\lg \sin 3x = t_1$, где t_1 – меньший корень (13). Имеем:

$$t_1 = a + 1 - \sqrt{a^2 - 7a + 6}; \qquad t_2 = a + 1 + \sqrt{a^2 - 7a + 6}.$$

Ясно, что $t_1 < t_2$. Следовательно,

$$\lg \sin 3x = a + 1 - \sqrt{a^2 - 7a + 6} \Leftrightarrow \sin 3x = 10^{a+1-\sqrt{a^2-7a+6}}$$

$$\Leftrightarrow 3x = (-1)^n \arcsin 10^{a+1-\sqrt{a^2-7a+6}} + \pi n \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = (-1)^n \frac{1}{3} \cdot \arcsin 10^{a+1-\sqrt{a^2-7a+6}} + \frac{\pi n}{3}, \quad n \in Z.$$

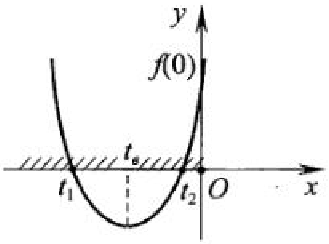


Рис. 9

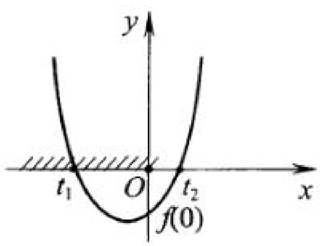


Рис. 10

Ответ: при $a > \frac{5}{9}$ решений нет;
при $a \le \frac{5}{9}$ решение $x = (-1)^n \frac{1}{3} \cdot \arcsin 10^{a+1-\sqrt{a^2-7a+6}} + \frac{\pi n}{3}, n \in Z.$

Разберем одно несложное уравнение с параметром, при решении которого школьники часто допускают стандартную ошибку.

Задача 6. При каких a уравнение

$$4^x - 2^{x+2} + 4a - a^2 = 0 \tag{14}$$

имеет два решения.

Решение. Обозначим $2^x = t$ Тогда уравнение (14) примет вид:

$$t^2 - 4t + 4a - a^2 = 0. \tag{15}$$

Чтобы исходное уравнение имело два различных корня, необходимо, чтобы уравнение (15) имело два различных положительных корня t_1 и t_2.

Дискриминант этого уравнения

$$D = (-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (4a - a^2) = 16 - 16a + 4a^2 = (2a-4)^2$$

является полным квадратом. Поэтому в этой задаче можно не использовать теорию с расположением корней квадратного трехчлена, а просто найти корни t_1 и t_2. Имеем $t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(2a-4)^2}}{2} = \frac{4 \pm (2a-4)}{2} = 2 \pm (a-2)$. Откуда получаем $t_1 = a$, $t_2 = 4 - a$.

И вот здесь многие рассуждают так: «Чтобы уравнение имело два решения, оба корня t_1 и t_2 должны быть больше нуля. Имеем систему

$$\begin{cases} a > 0 \\ 4 - a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow 0 < a < 4.$$

При этих a система имеет два положительных корня и, следовательно, это – ответ задачи». Но при этом забывают исключить те значения a, при которых $t_1 = t_2$, и, следовательно, имеется только один корень!

Итак, имеем, $t_1 = t_2 \Leftrightarrow 4 - a = a \Leftrightarrow 2a = 4 \Leftrightarrow a = 2$. Исключая $a = 2$, получаем правильный

Ответ: $a \in (0;\ 2) \cup (2;\ 4)$.

Перейдем к неравенствам. Чтобы сосредоточиться только на содержательных вопросах исследования неравенств с параметрами и не отвлекаться на вычисления, в качестве примеров мы выбрали ряд уже разобранных в этой главе уравнений, в которых просто заменим знак «равенства» на знак «больше» или «меньше». Ясно, что это никак не отразится на общности рассмотрения. Все рассуждения в этих неравенствах применимы и к любым другим.

Задача 7. Найти все a, при которых неравенство

$$25^x + 2(a+1) \cdot 5^x + 9a - 5 > 0 \tag{16}$$

выполняется при всех x.

Решение. Обозначим $5^x = t$. Тогда наше неравенство примет вид:

$$t^2 + 2(a + 1)t + 9a - 5 > 0\,. \tag{17}$$

Некоторые школьники в этом месте рассуждают так: «Раз исходное неравенство должно выполняться для всех x, то квадратное неравенство (17) должно выполняться при всех t». Конечно, если квадратное неравенство выполняется для всех t, то исходное неравенство будет выполняться для всех x. Но чуть ниже мы увидим, что квадратное неравенство (17) может выполняться не для всех t, а исходное неравенство, тем не менее, будет выполняться при всех x.

Будем рассуждать так. Пусть x «пробегает» множество всех действительных чисел. Тогда $t = 5^x$ «пробегает» множество положительных чисел, и, согласно (17), для каждого такого $t > 0$ должно выполняться это неравенство. Таким образом, чтобы исходное неравенство выполнялось для любых x, квадратное неравенство (17) должно выполняться на множестве положительных чисел, т. е. на множестве значений функции $t = 5^x$.

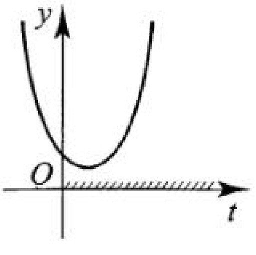


Рис. 11

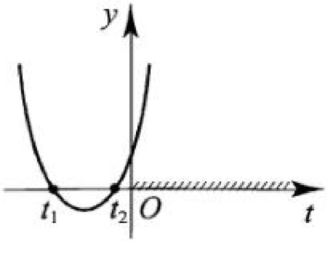


Рис. 12

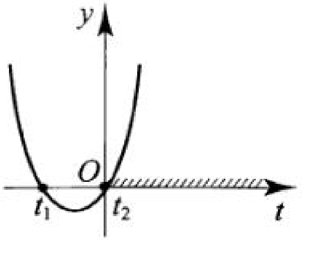


Рис. 13

Итак, исходная задача свелась к следующей: при каких a квадратное неравенство (20) выполняется для всех $t > 0$. Нарисовав график функции $y = t^2 + 2(a+1)t + 9a - 5$, легко видеть, что нам подходят только параболы на рис. 11–13 (когда парабола находится над осью Ot или когда корни t_1 и t_2 находятся «левее» множества $t > 0$).

1. В первом случае (рис. 11) квадратное неравенство выполняется вообще для всех t и, в частности, для $t > 0$. Это имеет место, если

$$\mathrm{D} < 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 28a + 24 < 0 \Leftrightarrow a \in (1;6)\,.$$

2. Второй случай, когда корни t_1 и $t_2 \le 0$ (рис. 12 и 13), будет иметь место при выполнении условий:

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ t_в \leq 0 \\ f(0) \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 28a + 24 \geq 0 \\ t_в = -a - 1 \leq 0 \\ 0^2 + 2(a+1) \cdot 0 + 9a - 5 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [\frac{5}{9}; 1] \cup [6; +\infty).$$

(Заметим, что нам подходит случай, когда парабола проходит через точку $t = 0$ (рис. 13), поскольку квадратное неравенство (20) должно выполняться для $t > 0$).

Объединяя теперь результаты, полученные в случаях 1 и 2, получаем окончательный.

Ответ: $a \in [\frac{5}{9}; +\infty)$.

Задача 8. Найти все a, при которых неравенство

$$25^{x^2} + 2(a+1)5^{x^2} + 9a - 5 > 0 \tag{18}$$

выполняется при всех x.

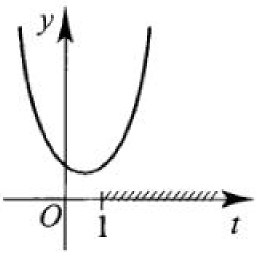


Рис. 14

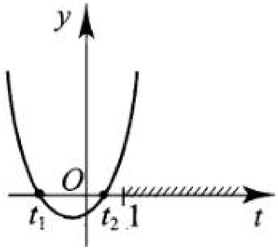


Рис. 15

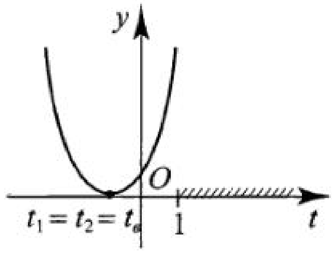


Рис. 16

Решение. Обозначим $t = 5^{x^2}$. Тогда наше неравенство примет вид:

$$t^2 + 2(a+1)t + 9a - 5 > 0. \tag{19}$$

Область значений $t = 5^{x^2}$ является промежуток $[1; +\infty)$.

Пусть x «пробегает» множество всех действительных чисел. Тогда $t = 5^{x^2}$ «пробегает» множество значений $[1; +\infty)$, и для каждого такого $t \geq 1$ должно выполняться квадратное неравенство (19).

Таким образом, исходная задача свелась к следующей: при каких a квадратное неравенство (19) выполняется при всех $t \geq 1$, т. е. при всех t из области значений функции $t = 5^{x^2}$. Последнее имеет место в двух случаях:

1. Когда график квадратного трехчлена $y = t^2 + 2(a+1)t + 9a - 5$ расположен выше оси Ot (рис. 14). В этом случае неравенство (19) выполняется вообще при всех t. Это имеет место при $\mathrm{D} < 0$. Получаем

$$\mathrm{D} = 4a^2 - 28a + 24 < 0 \Leftrightarrow a \in (1;6).$$

2. Когда парабола находится «левее» точки $t = 1$ (рис. 15 и 16), т. е. когда корни t_1 и t_2 квадратного трехчлена меньше 1. (Корни t_1 и t_2 могут совпадать, рис. 16). Этот случай имеет место при выполнении следующих условий:

$$\begin{cases} \mathrm{D} \geq 0 \\ t_в < 1 \\ f(1) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2 - 28a + 24 \geq 0 \\ t_в = -a - 1 < 1 \\ f(1) = 1^2 + 2(a+1)\cdot 1 + 9a - 5 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (\frac{2}{11};1] \cup [6;+\infty).$$

Объединяя случаи 1 и 2, получаем

Ответ: $a \in (\frac{2}{11}; +\infty)$.

Только что мы с вами разобрали два неравенства с параметрами. В обоих требовалось найти значения a, при которых данное неравенство выполняется при всех $x \in R$. После замены (в первом неравенстве $t = 5^x$, а во втором $t = 5^{x^2}$) оба неравенства свелись к квадратным и задача свелась к выяснению того, <u>при каких a полученное квадратное неравенство будет выполняться для всех $t \in E$, где E – множество значений функции t.</u> В первом случае множество E есть $(0; +\infty)$, во втором – $[1; +\infty]$.

Такая же картина будет иметь место практически во всех задачах, в которых заменой переменной $t = f(x)$, исходное неравенство сводится к квадратному. И наша задача будет состоять в нахождении тех значений параметра, при которых квадратное неравенство выполняется на множестве значений E функции $t = f(x)$.

Задача 9. При каких a неравенство

$$\cos^2 x - (2a-4)\sin x + 4a - 13 > 0$$

выполняется при всех x?

Решение. Заменяя $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ приведем неравенство к виду:

$$\sin^2 x + (2a-4)\sin x + 12 - 4a < 0. \tag{20}$$

Обозначим $t = \sin x$. Тогда неравенство (20) примет вид:

$$t^2 + (2a - 4)t + 12 - 4a < 0 . \qquad (21)$$

Множество значений $t = \sin x$ есть промежуток $[-1;\ 1]$. Рассуждая как и в предыдущих задачах, легко видеть, чтобы исходное неравенство выполнялось для любого x, необходимо и достаточно, чтобы квадратное нервенство (21) выполнялось для всех $t \in [-1;\ 1]$.

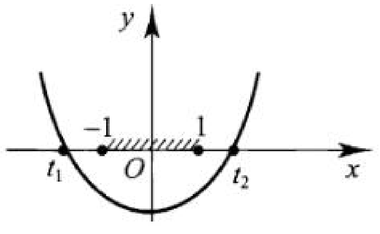


Рис. 17

Итак, наша задача свелась к следующей: найти все a, при которых неравенство (21) выполняется при всех $-1 \le t \le 1$. Это будет иметь место только в случае, когда отрезок $[-1;\ 1]$ находится между корнями квадратного трехчлена $f(t) = t^2 - (2a-4)t + 12 - 4a$ (рис. 17).
Последнее же будет иметь место при выполнении условий:

$$\begin{cases} f(-1) < 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (-1)^2 + (2a-4)(-1) + 12 - 4a < 0 \\ 1^2 + (2a-4)\cdot 1 + 12 - 4a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow a > 4{,}5 .$$

Ответ: $a \in (4{,}5; +\infty)$.

Задача 10. При каких a неравенство

$$\sin^4 x + \cos^4 x > a \sin x \cos x$$

выполнено при всех x ?

Решение. Преобразуем левую часть неравенства

$\sin^4 x + \cos^4 x = (\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x = 1 - 2\sin^2 x \cos^2 x =$

$= 1 - \dfrac{1}{2}\sin^2 2x$. Правая часть неравенства равна $a \sin x \cdot \cos x = \dfrac{a}{2}\sin 2x$.
Теперь наше неравенство имеет вид

$$1 - \frac{1}{2}\sin^2 2x > \frac{a}{2}\sin 2x .$$

Обозначая $t = \sin 2x$, имеем:

где $t \in [-1;1]$.

Итак, наша задача свелась к следующей: найти все a, при которых неравенство (22) выполняется при всех $t \in [-1;1]$. Эта задача полностью аналогична только что разобранной задаче 9. После точно таких же рассуждений и выкладок (проведите их самостоятельно!) получаем

Ответ: $a \in (-1;1)$.

§ 2. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ МАТЕРИАЛ ПО АЛГЕБРЕ

Для решения ряда последующих задач нам понадобятся дополнительные сведения по алгебре.

I. Пусть даны два неотрицательных числа a и b. Тогда величина $\frac{a+b}{2}$ называется средним арифметическим, а $\sqrt{ab}$ – средним геометрическим чисел a и b. Среднее арифметическое и среднее геометрическое двух чисел связаны определенным неравенством.

Пусть a и b произвольные неотрицательные числа; тогда справедливо неравенство

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2}, \qquad (23)$$

т. е. среднее геометрическое чисел a и b всегда меньше или равно их среднему арифметическому, при этом равенство достигается при $a = b$.

Покажем это. Перенеся все члены в одну сторону, получим:

$$\sqrt{ab} \le \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \frac{a+b}{2} - \sqrt{ab} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{a+b-2\sqrt{ab}}{2} \ge 0 \Leftrightarrow \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2}{2} \ge 0.$$

В последнем неравенстве в числителе и в знаменателе стоят неотрицательные числа, поэтому оно выполняется при любых допустимых a и b. При этом равенство имеет место при $a = b$.

Очень часто неравенство между средним арифметическим и средним геометрическим записывается в виде:

$$a+b \ge 2\sqrt{ab}. \qquad (24)$$

В этом виде мы им чаще всего и будем пользоваться.

Рассмотрим на конкретных примерах применение неравенства (24).

1) Если $a = 9x,\ b = \dfrac{4}{x}$, то при всех $x > 0$ выполняется неравенство $9x + \dfrac{4}{x} \ge 2\sqrt{9x \cdot \dfrac{4}{x}} = 2\sqrt{36} = 12$. При этом равенство достигается при $a = b \Leftrightarrow 9x = \dfrac{4}{x} \Leftrightarrow x^2 = \dfrac{4}{9} \Leftrightarrow x_1 = \dfrac{2}{9},\ x_2 = -\dfrac{2}{9}$. ($x_2 = -\dfrac{2}{9}$ нам не подходит, т. к по условию $x > 0$). Таким образом, мы показали, что наименьшее значение выражения $9x + \dfrac{4}{x}$ при $x > 0$ равно 12 и достигается при $x = \dfrac{2}{9}$. При остальных $x > 0$ выполняется строгое неравенство $9x + \dfrac{4}{x} > 12$.

2) $5x^2 + \dfrac{20}{x^2} \ge 2\sqrt{5x^2 \cdot \dfrac{20}{x^2}} = 20$. При этом равенство достигается, когда $5x^2 = \dfrac{20}{x^2} \Leftrightarrow x^4 = 4 \Leftrightarrow x_1 = \sqrt[4]{4} = \sqrt{2},\ x_2 = -\sqrt{2}$ (подходят оба значения, т. к. выражения $5x^2$ и $\dfrac{20}{x^2}$ положительны при всех $x \ne 0$).

3) $\dfrac{2^{x+1}}{3} + 3 \cdot 2^{1-x} \ge 2\sqrt{\dfrac{2^{x+1}}{3} \cdot 3 \cdot 2^{1-x}} = 2\sqrt{\dfrac{2}{3} \cdot 2^x \cdot 6 \cdot \dfrac{1}{2^x}} = 2\sqrt{4} = 4$. Равенство достигается, когда $\dfrac{2^{x+1}}{3} = 3 \cdot 2^{1-x} \Leftrightarrow \dfrac{2^x \cdot 2}{3} = \dfrac{6}{2^x} \Leftrightarrow 4^x = 9$. Откуда находим $x = \log_4 9$.

II. Неравенство (24), как мы уже не раз говорили, справедливо для a и $b \ge 0$. При $a, b \le 0$ справедливо аналогичное неравенство. Действительно, если $a, b \le 0$, то величины $(-a)$ и $(-b)$, будут неотрицательными и к ним можно применить неравенство (24). Имеем

$$(-a) + (-b) \ge 2\sqrt{(-a)(-b)} \Leftrightarrow -a - b \ge 2\sqrt{ab}.$$

Умножив последнее неравенство на (-1), получаем

$$a + b \le -2\sqrt{ab}. \tag{25}$$

При этом равенство достигается также при $a = b$.

Рассмотрим на конкретных примерах применение неравенства (25).

1) При $x<0$, $9x+\frac{4}{x}\le -2\sqrt{9x\cdot\frac{4}{x}}=-2\sqrt{36}=-12$. Равенство достигается при $9x=\frac{4}{x}\Leftrightarrow x^2=\frac{4}{9}$. Откуда находим $x_1=-\frac{2}{9}$, $x_2=\frac{2}{9}$ – не подходит, т. к. по условию $x<0$.

2) При $x\in(\frac{\pi}{2};\pi)$ значения $\operatorname{tg}x$ и $\operatorname{ctg}x<0$. Поэтому справедливо неравенство $3\operatorname{tg}x+4\operatorname{ctg}x\le -2\sqrt{3\operatorname{tg}x\cdot 4\operatorname{ctg}x}=-2\sqrt{12}=-4\sqrt{3}$.

Применим неравенства (24) и (25) к исследованию функции $f(x)=x+\frac{1}{x}$.

a) Область определения этой функции состоит из всех $x\ne 0$.

b) Рассмотрим сначала функцию $f(x)$ на множестве $x>0$. Обозначив $a=x$, $b=\frac{1}{x}$ и воспользовавшись неравенством (24), имеем:

$$x+\frac{1}{x}\ge 2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}\;\Leftrightarrow\; x+\frac{1}{x}\ge 2. \tag{26}$$

Таким образом, наименьшее значение $f(x)$ равно 2 и достигается, когда $x=\frac{1}{x}\Leftrightarrow x^2=1\Leftrightarrow x=1$. (Значение $x=-1$ не подходит, т. к. мы рассматриваем функцию $f(x)$ на множестве $x>0$.)

c) Когда x неограниченно растет $f(x)=x+\frac{1}{x}$ также неограниченно растет. Когда x приближается к 0, то обратная величина $\frac{1}{x}$ неограниченно растет, следовательно, $f(x)$ также неограниченно растет. График функции $f(x)=x+\frac{1}{x}$ при $x>0$ представлен на рис.18 (правая ветвь).

Рассмотрим теперь функцию $f(x)=x+\frac{1}{x}$ на множестве $x<0$.

d) Воспользовавшись неравенством (25), имеем

$$x+\frac{1}{x}\le -2\sqrt{x\cdot\frac{1}{x}}\;\Leftrightarrow\; x+\frac{1}{x}\le -2. \tag{27}$$

При этом равенство достигается при $x = \frac{1}{x} \Leftrightarrow x^2 = 1 \Leftrightarrow x_1 = 1,\ x_2 = -1$. Нам подходит только $x_2 = -1$, т. к. мы рассматриваем $f(x)$ на множестве $x < 0$.

е) Когда x стремится к $-\infty$, $f(x)$ также стремится к $-\infty$. Когда x стремится к нулю, оставаясь отрицательным, $f(x)$ стремится к $-\infty$.

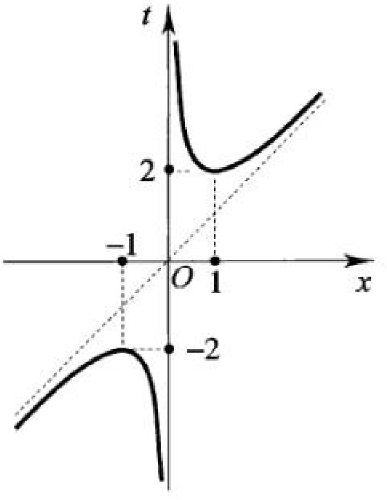


Рис. 18

График функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ при $x < 0$ представлен на рис. 18 (левая ветвь).

По графику на рис. 18 и из предыдущего анализа мы видим, что область значений функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$ есть множество $(-\infty; -2] \cup [2; +\infty)$. На промежутке $(-\infty; 0)$ она имеет максимум равный (–2), который достигается в точке $x = -1$. На промежутке $(0; +\infty)$ она имеет минимум равный 2, и достигающийся при $x = 1$.

Заметим, что функцию $f(x)$ можно также исследовать с помощью производной (тем, кто уже знаком с производной, я советую проделать это в качестве упражнения).

Выше мы воспользовались неравенствами (26) и (27) при исследовании функции $f(x) = x + \frac{1}{x}$. Но эти неравенства важны и сами по себе. Они часто используются при решении различных нестандартных задач и не только с параметрами. Покажем их применение на конкретных примерах.

1) $\sqrt[5]{\dfrac{71}{72}}+\sqrt[5]{\dfrac{72}{71}}>2$, здесь $x=\sqrt[5]{\dfrac{71}{72}}$, тогда $\dfrac{1}{x}=\sqrt[5]{\dfrac{72}{71}}$.

2) $\mathrm{tg}23^\circ+\mathrm{ctg}23^\circ>2$, т. к. $\mathrm{ctg}23^\circ=\dfrac{1}{\mathrm{tg}23^\circ}$.

3) $\mathrm{tg}123^\circ+\mathrm{ctg}123^\circ<-2$, т. к. $\mathrm{tg}123^\circ$ и $\mathrm{ctg}123^\circ<0$.

4) $2^x+2^{-x}\geq 2$, при этом равенство достигается, когда $2^x=1\Leftrightarrow x=0$.

5) При $x>1$ выполняется неравенство $\log_2 x+\log_x 2\geq 2$. Действительно, $\log_x 2=\dfrac{1}{\log_2 x}$ и при $x>1$ имеем $\log_2 x>0$. Равенство достигается, когда $\log_2 x=1\Leftrightarrow x=2$.

6) При $0<x<1$ справедливо неравенство $\log_2 x+\log_x 2\leq -2$ (в этом случае $\log_2 x<0$). Равенство достигается, когда $\log_2 x=-1\Leftrightarrow x=\dfrac{1}{2}$.

7) $x+2a+\dfrac{1}{x+2a}\geq 2$ при всех x и a таких, что $x+2a>0$.

Неравенства (24) — (27) я советую запомнить. Мы воспользуемся ими при решении ряда последующих задач, а также задач, предлагавшихся на ЕГЭ.

Симметрические уравнения

Рассмотрим уравнение $2x^4-5x^3+4x^2-5x+2=0$. Особенностью этого уравнения является то, что коэффициенты членов, равноудаленных от его концов, равны. Такие уравнения называются *симметрическими*. Данное уравнение – симметрическое четвертой степени. Стандартный способ решения этого уравнения – деление на x^2. Заметив, что $x=0$ не является его корнем, мы после деления на x^2, получим равносильное уравнение

$$2x^2-5x+4-\frac{5}{x}+\frac{2}{x^2}=0,$$

или, после группировки,

$$2x^2+\frac{2}{x^2}-(5x+\frac{5}{x})+4=0 \Leftrightarrow 2(x^2+\frac{1}{x^2})-5(x+\frac{1}{x})+4=0.$$

Обозначим $x+\dfrac{1}{x}=t$. Тогда $t^2=(x+\dfrac{1}{x})^2=x^2+2+\dfrac{1}{x^2}$, откуда $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$. Теперь наше уравнение сводится к квадратному

$$2(t^2-2)-5t+4 \Leftrightarrow 2t^2-5t=0\,.$$

Его корни $t_1 = 2$, $t_2 = 0$. Осталось решить уравнения $x+\dfrac{1}{x}=0$ и $x+\dfrac{1}{x}=2$. Первое уравнение корней не имеет. Корнями второго являются $x_1=\dfrac{1}{2}$ и $x_2 = 2$.

Ответ: $x_1=\dfrac{1}{2},\ x_2=2$.

Аналогично решаются симметрические неравенства

$$2x^4-5x^3+4x^2-5x+2>0 \ \text{(или } <0)\,.$$

§ 3. ПРОДОЛЖЕНИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Задача 11. При каких a неравенство

$$x^4-2(a+1)x^3+(6a+3)x^2-2(a+1)x+1>0 \tag{28}$$

выполняется при любом x?

Решение. Данное неравенство — симметрическое; $x = 0$ является его решением при любом a, в чем легко убедиться, подставив значение 0 в (28). Если $x \neq 0$, то, разделив на x^2, получим равносильное неравенство

$$x^2-2(a+1)x+(6a+3)-\frac{2(a+1)}{x}+\frac{1}{x^2}>0$$

или

$$(x^2+\frac{1}{x^2})-2(a+1)(x+\frac{1}{x})+6a+3>0\,. \tag{29}$$

Обозначим $x+\dfrac{1}{x}=t$. Тогда $x^2+\dfrac{1}{x^2}=t^2-2$. Теперь неравенство (29) легко приводится к виду

$$t^2-2(a+1)t+6a+1>0\,, \tag{30}$$

где $t=x+\dfrac{1}{x}$.

Как мы показали в §2, область значений t есть множество $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Теперь наша задача свелась к следующей: найти все a, при которых неравенство (30) выполняется при всех t, принадлежащих $(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Последнее будет иметь место в двух случаях.

1. Когда дискриминант квадратного трехчлена $t^2-2(a+1)t+6a+1$ меньше нуля. В этом случае парабола $f(t)=t^2-2(a+1)t+6a+1$ находится над осью абсцисс и неравенство (35) выполняется вообще при всех $t\in R$ и, в частности, при $t\in(-\infty;-2]\cup[2;+\infty)$. Имеем

$$\mathrm{D}<0 \Leftrightarrow 4a^2-16a<0 \Leftrightarrow a\in(0;4).$$

2. Когда корни квадратного трехчлена $t^2-2(a+1)t+6a+1$ принадлежат промежутку $(-2;\,2)$ (рис. 19). Это будет при выполнении условий:

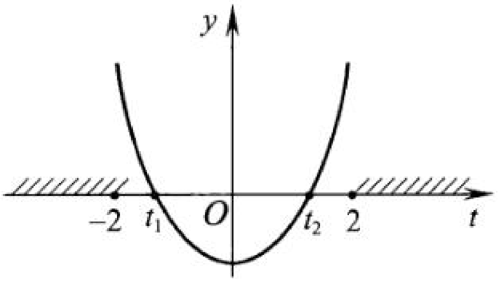


Рис. 19

$$\begin{cases} D\ge 0 \\ -2<t_в<2 \\ f(2)>0 \\ f(-2)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4a^2-16a\ge 0 \\ -2<a+1<2 \\ f(2)=2^2-2(a+1)\cdot 2+6a+1>0 \\ f(-2)=(-2)^2-2(a+1)(-2)+6a+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in(-\frac{1}{2};0].$$

Объединив результаты первого и второго случаев, получаем

Ответ: $a\in(-\frac{1}{2};4)$.

До сих пор мы рассматривали для неравенств только один вид задач: при каких a данное неравенство выполняется при всех $x\in R$? Рассмотрим другие постановки задач.

Задача 12. При каких a неравенство

$$4^x-2(a+1)\cdot 2^x+4a+9\le 0 \qquad (31)$$

a) выполняется при всех $x\in R$;

b) не выполняется ни при каком x;

c) выполняется ровно для одного значения x;

d) выполняется хотя бы при одном x?

Решение. Обозначив $t = 2^x$, перепишем неравенство (31) в виде:

$$t^2 - 2(a+1)t + 4a + 9 \le 0. \qquad (32)$$

Область значений $t = 2^x$ есть множество $(0;+\infty)$.

a) Неравенство (31) выполняется при всех x, если квадратное неравенство (32) выполняется при всех $t \in (0;+\infty)$. А это означает, что промежуток $(0;+\infty)$ содержится среди решений неравенства (32). Но последнее невозможно, т. к. решением квадратного неравенства (32) может быть либо промежуток $[t_1; t_2]$, либо одна точка, либо пустое множество.

Итак, ответ на первый вопрос – таких a нет.

b) Неравенство (31) не выполняется ни при каких x означает, что квадратное неравенство (32) не выполняется ни при одном $t > 0$. А это будет в двух случаях.

1. При $\mathrm{D} < 0 \Leftrightarrow \mathrm{D} = 4a^2 - 8a - 32 < 0 \Leftrightarrow a \in (-2;4)$. В этом случае парабола $y = t^2 - 2(a+1)t + 4a + 9$ находится над осью Ot (рис. 20) и неравенство (37) не выполняется вообще ни при каких t.

2. Если корни t_1 и t_2 квадратного трехчлена $t^2 - 2(a+1)t + 4a + 9$ будут находиться «слева» от множества $(0;+\infty)$, т. е. $t_1, t_2 \le 0$ (рис. 21).

Выпишем соответствующие условия:

$$\begin{cases} \mathrm{D} \ge 0 \\ t_в \le 0 \\ f(0) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{D} = 4a^2 - 8a - 32 \ge 0 \\ t_в = a + 1 \le 0 \\ f(0) = 4a + 9 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-2,25;-2].$$

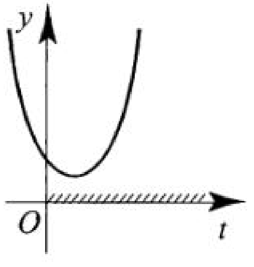


Рис. 20

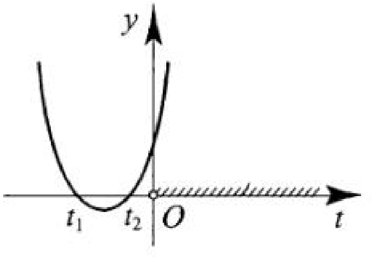


Рис. 21

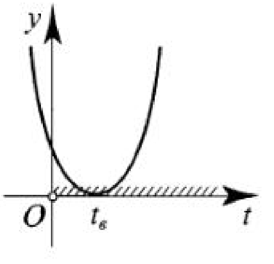


Рис. 22

Общий ответ в пункте b): $a \in [-2,25;4]$.

c) Неравенство (31) выполняется ровно для одного значения x, если квадратное неравенство (32) выполняется ровно для одного значения $t > 0$. Это будет только в случае, когда парабола $y = t^2 - 2(a+1)t + 4a + 9$ касается оси Ot в какой-то точке промежутка $(0;+\infty)$ (рис. 22). Последнее имеет место при выполнении условий:

$$\begin{cases} D=0 \\ t_в>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=4a-8a-32=0 \\ t_в=a+1>0 \end{cases} \Leftrightarrow a=4.$$

d) Исходное неравенство выполняется хотя бы при одном x, означает, что квадратное неравенство (32) выполняется хотя бы при одном $t>0$. Конечно, можно перебрать все такие случаи. Но будем рассуждать так: в пункте b) мы нашли, что при $a\in[-2,25;4]$ исходное неравенство не выполняется ни при каком x. Значит при остальных a оно выполняется хотя бы при одном x. Следовательно, значения $a\in(-\infty;-2,25)\cup(4;+\infty)$ являются ответом в случае d).

Ответ: a) $a\in\varnothing$; b) $a\in[-2,25;4]$; c) $a=4$;
d) $a\in(-\infty;-2,25)\cup(4;+\infty)$.

Задача 13. При каких a неравенство

$$4^{x+1}-(2a+3)\cdot 2^x+6a-16\le 0 \tag{33}$$

выполняется при всех $-2\le x\le 1$?

Решение. Приведя неравенство (33) к виду

$$4\cdot 4^x-(2a+3)\cdot 2^x+6a-16\le 0,$$

и обозначив $t=2^x$, получим

$$4t^2-(2a+3)+6a-16\le 0. \tag{34}$$

Поскольку $-2\le x\le 1$, то $\frac{1}{4}\le t=2^x\le 2$.

Таким образом, наша задача свелась к следующей. Найти все a, при которых неравенство (34) выполняется при всех $t\in[\frac{1}{4};2]$. Последнее имеет место при выполнении условий:

$$\begin{cases} f(\frac{1}{4})\le 0 \\ f(2)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(\frac{1}{4})=4\cdot(\frac{1}{4})^2-(2a+3)\cdot\frac{1}{4}+6a-16\le 0 \\ f(2)=4\cdot 2^2-(2a+3)\cdot 2+6a-16\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\le 3.$$

Ответ: $a\in(-\infty;3]$.

Задача 14. При каких a из неравенства

$$4^{x+1}-(2a+3)\cdot 2^x+6a-16\le 0 \tag{35}$$

следует неравенство

$$x^2+x-2\le 0. \tag{36}$$

Решение. Условие, что из неравенства (35) следует неравенство (36), означает, что все решения неравенства (35) содержатся среди решений неравенства (36). Множество решений неравенства (36) есть промежуток $[-2;\ 1]$. Следовательно, все решения неравенства (35) должны содержаться в промежутке $[-2;\ 1]$. Обозначим $t=2^x$. Тогда неравенство (35) можно записать в виде

$$4t^2-(2a+3)t+6a-16\le 0. \tag{37}$$

Так как $-2\le x\le 1$, то $\frac{1}{4}\le t\le 2$. Теперь условие того, что множество решений неравенства (35) содержится среди решений (36), равносильно тому, что множество решений квадратного неравенства (37) содержится в промежутке $[\frac{1}{4};2]$. А это будет (рис. 23) при выполнении условий:

$$\begin{cases} D\ge 0 \\ \frac{1}{4}\le t_в\le 2 \\ f(\frac{1}{4})\ge 0 \\ f(2)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in[3;\frac{21-4\sqrt{11}}{2}].$$

Ответ: $a\in[3;\frac{21-4\sqrt{11}}{2}]$.

Задача 15. При каких a неравенство

$$4^{x^2-2x+1}+(2a+3)\cdot 2^{x^2-2x}+6a-16\le 0$$

выполняется при всех $x\in[0;3]$?

Решение. Перепишем неравенство в виде:

$$4\cdot 4^{x^2-2x}+(2a+3)\cdot 2^{x^2-2x}+6a-16\le 0.$$

Обозначим $t = 2^{x^2-2x}$. Найдем область значений t. В этом месте некоторые школьники рассуждают так: «Поскольку $0 \le x \le 3$, то, подставив крайние значения $x = 0$ и $x = 3$ в функцию $y(x) = x^2 - 2x$ получим, $y(0) = 0$ и $y(3) = 3$. Следовательно, область значений функции $y(x) = x^2 - 2x$ есть промежуток $[0;3]$. А поскольку $t = 2^{x^2-2x}$, то t меняется от $2^0 = 1$ до $2^3 = 8$». В этих рассуждениях имеется ошибка. Дело в том, что множество значений функции $f(x)$, заданной на промежутке $[a;b]$, не всегда определяется её крайними значениями $f(a)$ и $f(b)$. Это верно только для монотонных функций. Для немонотонных функций это зачастую неверно. Функция $y = x^2 - 2x$ на промежутке $[0; 3]$ не является монотонной и множество ее значений не определяется ее значениями на концах промежутка $y(0) = 0$ и $y(3) = 3$.

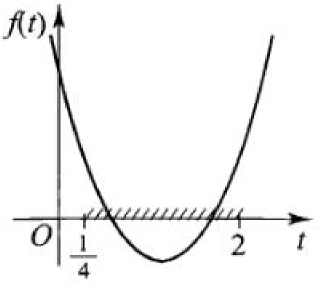


Рис. 23

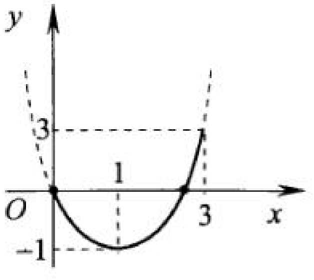


Рис. 24

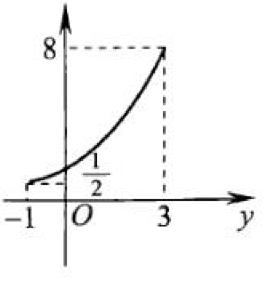


Рис. 25

Для нахождения области значений функции $y = x^2 - 2x$ проще всего построить график этой функции и рассмотреть ту его часть, которая находится на промежутке $[0; 3]$ (на рис.24 она выделена жирной линией). Мы видим, что наименьшее значение этой функции достигается в вершине параболы $x_в = 1$ и равно -1, а наибольшее - в правом конце промежутка $[0; 3]$ и равно 3. Таким образом, множество значений $y(x)$ есть промежуток $[-1; 3]$.

А вот функция $h = 2^y$ монотонно возрастающая. Следовательно, ее множество значений заключено между $h(-1) = 2^{-1} = \dfrac{1}{2}$ и $h(3) = 2^3 = 8$ (рис.25).

Итак, мы нашли, что областью значений $t = 2^{x^2-2x}$, при $x \in [0;3]$, является промежуток $[\frac{1}{2};8]$. Теперь исходная задача сводится к следующей: при каких значениях параметра a квадратное неравенство

$$4t^2 + (2a+3)t + 6a - 16 \le 0$$

выполняется при всех $\frac{1}{2} \le t \le 8$. Обозначим $f(t) = 4t^2 + (2a+3)t + 6a - 16$ тогда условиями этого будут:

$$\begin{cases} f(\frac{1}{2}) \le 0 \\ f(8) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \le -12 \ .$$

Ответ: $a \in (-\infty; -12]$.

Заключительные замечания. В этой главе мы рассмотрели уравнения с параметрами вида $a \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) + c = 0$. Обозначив $t = f(x)$, мы сводили наше уравнение к исследованию расположения корней квадратного уравнения $at^2 + bt + c = 0$ относительно множества значений E функции $t = f(x)$. И в зависимости от постановки исходной задачи нам требовалось то или иное расположение этих корней относительно E.

Исследование неравенств $a \cdot f^2(x) + b \cdot f(x) + c < 0$ (или > 0) также сводилось к исследованию квадратного неравенства $at^2 + bt + c < 0$ (или > 0) на множестве E. Если исходное неравенство должно было выполняться для всех $x \in R$, то задача сводилась к исследованию того, когда соответствующее квадратное неравенство выполняется для всех $t \in E$.

Это - основные идеи, которые использовались при решении всех задач этой главы. Их надо хорошо понять, что даст возможность без проблем решать задачи данного вида.

Кроме этого, для решения этих и многих других задач необходимо уметь находить множество значений E для различных функций $t = f(x)$. Здесь нет единого подхода. Иногда это делается с помощью производной, иногда с использованием монотонности, иногда с помощью неравенств между средним арифметическим и средним геометрическим или с помощью иных содержательных соображений. Решение задач позволит вам приобрести необходимый опыт

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. При каких значениях параметра a уравнение

a) не имеет решений;

b) имеет одно решение;

c) имеет два решения;

d) имеет хотя бы одно решение;

e) имеет два решения, причем оба решения больше двух.

2. При всех значениях a решить уравнение $9^x+(a+2)\cdot 3^x+\frac{a}{2}+3=0$ и указать, при каких a оно имеет единственное решение.

3. При каких p уравнение $(p-10)5^{2x+1}+2\cdot 5^{x+1}+p-6=0$ не имеет решений.

4. При каких p уравнение $\sin^2 x+p\cdot\sin x-p^2+1=0$ имеет решения?

5. При каких значениях a уравнение $9^x-3^{x+1}+3a-a^2=0$ имеет два различных корня?

6. При каких значениях a уравнение $\cos 2x-2\cos x-2a^2+2a+1=0$ не имеет решений?

7. При каких значениях a корни уравнения $16^x-3\cdot 4^{x+\frac{1}{2}}+6a-a^2=0$ различны и положительны?

При всех значениях параметра a решить уравнения:

8. $25^x-(a-1)\cdot 5^x+2a+3=0$. Указать, при каких a оно имеет единственное решение.

9. $\cos^4 x-(a+2)\cos^2 x-(a+3)=0$.

10. $9^{-|x-2|}-4\cdot 3^{-|x-2|}-a=0$.

11. $(\lg\sin x)^2-2a\lg\sin x-a^2+2=0$.

12. При всех $-1\le m\le 1$ решить уравнение $4^{\sin x}+m\cdot 2^{\sin x}+m^2-1=0$.

При каких значениях параметра a следующие неравенства выполняются при всех x:

13. $9^x+(2a+4)\cdot 3^x+8a+1>0$;

14. $4^{x^2}+(4a+2)\cdot 2^{x^2}+4a^2-3>0$;

15. $(5a+5)9^x-30\cdot 3^{x-1}+a-3>0$;

16. $9^{|\sin x|}+2(a-2)\cdot 3^{|\sin x|}+a^2-1>0$;

17. $a9^x+4(a-1)3^x+a>1$;

18. $a^2+a-\sin^2 x-2a\cdot\cos x>1$.

19. При всех a решить неравенство $9^{x+1}+8a\cdot 3^x-a^2>0$.

20. При всех p решить неравенство $2\cdot 16^{x+\frac{1}{2}}<2a\cdot 4^x+3a^2$.

При каких a следующие неравенства выполняются хотя бы при одном x :

21. $36^x+a\cdot 6^x+a+8\le 0$;

22. $9^x-(2a+1)\cdot 3^x-5a^5-a>0$.

23. При каких a неравенство $4^x-(3a+1)\cdot 2^x+5a-5<0$ выполняется при всех $0<x<2$?

24. При каких b неравенство $4^x+(4b+8)\cdot 2^x+18b+22>0$ выполняется при всех $x>0$?

25. При каких значениях параметра a неравенство $(a-1)\sin^2 x+2(a-2)\sin x+a+3<0$ не имеет решений?

БОЛЕЕ ТРУДНЫЕ ЗАДАЧИ

26. При каких значениях p уравнение $4^x+2^{x+2}+7=p-4^{-x}-2\cdot 2^{1-x}$ имеет решения?

27. При каких значениях a уравнение $(1+a)\left(\frac{x^2}{1+x^2}\right)^2-3a\cdot\frac{x^2}{x^2+1}+4a=0$ имеет корни?

28. При каких значениях p неравенство $\cos 2x-31\le 4p(1-|\sin x|)$ выполняется для любого $x\in R$?

29. При каких значениях a уравнение
$\frac{1}{27}(54x-9x^2)^2-a(3\sqrt{2}-\sqrt{2}x)^2+72x=3(4x^2-9a-4)$ имеет четыре корня?

30. При каких a из неравенства $x^2\le\frac{\pi^2}{36}$ следует неравенство

$\cos 2x + 8(a+1)|\sin x| - 2a + 9 \geq 0$?

31. При каких m неравенство $16^{\sin x} - (3m+3)4^{\sin x} + 9m - 22 \leq 0$ выполняется для всех $x \in \left(0; \dfrac{5\pi}{6}\right)$?

32. При каких значениях a неравенство
$16x^4 - 4ax^3 + (a+75)x^2 - 9ax + 81 > 0$ выполняется при всех x ?

33. При каких значениях a неравенство
$\log_2^2(7x^2 - 28x + 29) + a\log_{\frac{1}{2}}(7x^2 - 28x + 29)^2 \leq 36 - 5a - a^2$ выполняется при всех $x \in [-1; 3]$?

34. Найти все значения a, при которых неравенство
$$4a^2 \cdot \sqrt{2 - \frac{6}{\pi}\arcsin\left(\sqrt{3} - 2x\right)} + \frac{12a}{\pi}\arccos(2x - \sqrt{3}) - 8a^2 - 3a \leq 1$$
выполняется для всех $x \in \left[\dfrac{2\sqrt{3}-1}{4}; \dfrac{3\sqrt{3}}{4}\right]$.

Глава 6

ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ. МЕТОД СЕЧЕНИЙ

Применение графиков при исследовании задач с параметрами необычайно эффективно. В зависимости от способа их применения выделяют два основных подхода. Один из них часто называют методом сечений, другой координатно-параметрическим методом [11]. В этой главе мы рассмотрим только метод сечений, координатно-параметрический метод будет рассмотрен во второй части книги. Такое разнесение методов сделано для того, чтобы у школьников, которые впервые знакомятся с графическими методами, не возникло путаницы из-за их смешения.

Прежде, чем перейти к задачам с параметрами, я напомню основные факты о графиках функций, без знания которых чтение этой главы может оказаться просто бессмысленным.

§ 1. УГОЛ НАКЛОНА ПРЯМОЙ

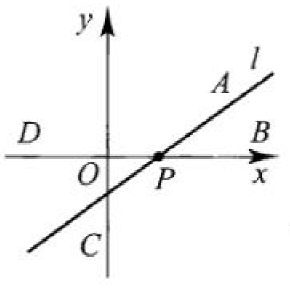


Рис. 1

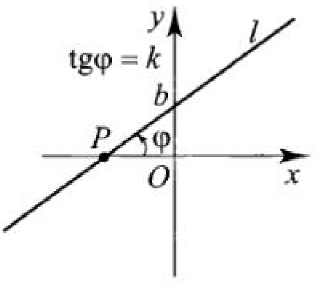


Рис. 2

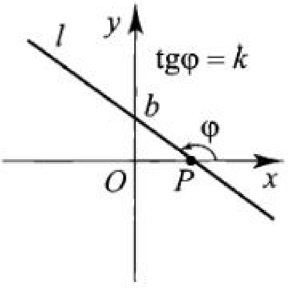


Рис. 3

Пусть на плоскости введена прямоугольная система координат xOy и задана некоторая прямая l. Обозначим буквой P точку пересечения этой прямой с осью Ox. В точке P прямая l образует с осью Ox несколько углов (рис. 1).

Это углы APB, APD, DPC и BPC. Какой из этих углов принять за угол между прямой l и осью Ox ? В математике принято следующее определение.

Под углом между прямой l и осью Ox понимается угол φ в пределах $0° \le \varphi < 180°$, на который надо повернуть положительное направление оси Ox вокруг точки P против часовой стрелки до его совпадения с прямой l. (Если измерение угла происходит в радианах, то $0 \le \varphi < \pi$). На рисунках 2 и 3 искомые углы показаны дугой со стрелочкой. Если прямая l параллельна оси Ox или совпадает с ней, угол считается равным $0°$ (рис. 4).

Из этого определения следует, что:

1. угол между прямой и осью Ox не может быть отрицательным;
2. угол строго меньше $180°$;
3. увеличение угла идет против часовой стрелки.

§ 2. УРАВНЕНИЕ ПРЯМОЙ

В школьном курсе математики доказывается, что графиком линейной функции $y = kx + b$ при всех k и b является прямая линия. Верно и обратное утверждение: если на плоскости введена прямоугольная система координат, тогда любую прямую l, не перпендикулярную оси Ox, можно задать уравнением:

$$y = kx + b. \qquad (1)$$

Прямая, перпендикулярная оси Ox (рис. 5) задается уравнением

$$x = c.$$

В уравнении $y = kx + b$ коэффициент k называется угловым коэффициентом, b – свободным членом. Например, уравнения $y = 6x + 2$ и $y = 3 - 5x$ задают прямые линии с угловыми коэффициентами $k_1 = 6$ и $k_2 = -5$ соответственно.

§ 3. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ СМЫСЛ ПАРАМЕТРОВ ПРЯМОЙ

а) Пусть функция $y = kx + b$ задает на плоскости xOy прямую l, образующую с осью Ox угол φ. Тогда коэффициент k в точности равен тангенсу угла наклона прямой l к оси Ox, т. е. $k = \operatorname{tg} \varphi$ (рис. 2 и 3). Этот факт доказывается в школьном курсе математики.

б) Если в уравнении $y = kx + b$ взять $x = 0$, то $y = k \cdot 0 + b = b$. Из этого ясно, что b – координата точки, в которой прямая l пересекает ось Oy (рис. 2 и 3).

Эту геометрическую интерпретацию углового коэффициента k и свободного члена b мы будем часто использовать при решении задач графическими методами.

Заметим, если в уравнении $y = kx + b$ взять $k = 0$, то оно примет вид:

$$y = 0 \cdot x + b, \text{ т.е. } y = b. \qquad (2)$$

Как известно, уравнение $y = b$ определяет на плоскости прямую, параллельную оси Ox, проходящую через точку b (рис. 4).

§ 4. ГРАФИКИ ЛИНЕЙНЫХ ФУНКЦИЙ

Задача 1. Построить график функции $y = 2x - 1$.

Решение. График этой функции – прямая линия. Для построения прямой достаточно найти две ее точки. Чаще всего в качестве точек A и B берутся точки пересечения данной прямой с осями координат. Точка A: $x = 0$ $\Rightarrow y = 2 \cdot 0 - 1 = -1$. Точка B: $y = 0 \Rightarrow 2x - 1 = 0, x = \frac{1}{2}$.

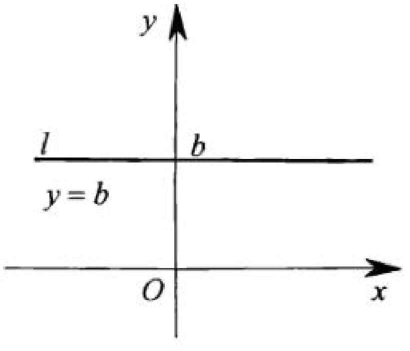


Рис. 4

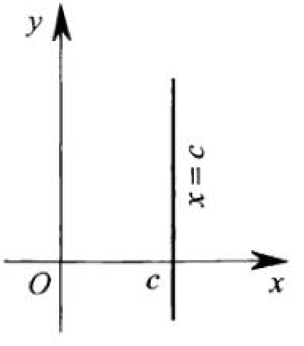


Рис. 5

Через эти точки проводим искомую прямую (рис. 6).
Тангенс угла наклона данной прямой равен 2.

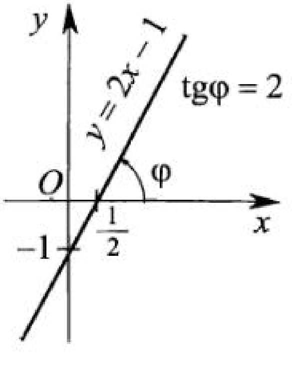


Рис. 6

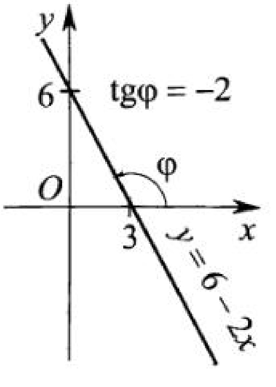


Рис. 7

Задача 2. Построить график функции $y = 6 - 2x$.

Решение. Имеем:

1) $x = 0 \Rightarrow y = 6$; 2) $y = 0 \Rightarrow 6 - 2x = 0$, $x = 3$. Искомый график представлен на рис. 7. Тангенс угла наклона этой прямой равен -2. Сравнивая рис. 6 и 7, мы видим, что $y = 2x - 1$ – возрастающая функция, а $y = 6 - 2x$ – убывающая. Легко показать в общем виде, что при $k > 0$ функция $y = kx + b$ будет возрастающей, а при $k < 0$ – убывающей.

Заметим также, что при $k \neq 0$ и область определения, и область значений линейной функции $y = kx + b$ есть множество всех действительных чисел.

При $k = 0$, $y = b$ есть прямая, параллельная оси Ox. Область ее определения также множество всех действительных чисел, а множество значений состоит из одной точки $y = b$ (рис. 4).

Напомним еще, что график линейной функций $y = x$ совпадает с биссектрисой I и III координатных углов (рис. 8). Это следует из того, что угловой коэффициент k данной прямой равен 1. Следовательно, $\operatorname{tg} \varphi = 1$, поэтому угол между осью Ox и нашей прямой равен $45°$.

График функции $y = -x$ совпадает с биссектрисой II и IV координатных углов (рис. 9). Угловой коэффициент k этой прямой равен (-1), следовательно, $\operatorname{tg} \varphi = -1$, а сам угол φ равен $135°$ (рис. 9).

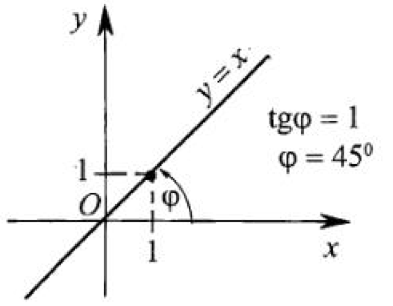


Рис. 8

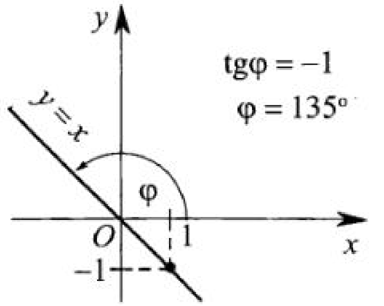


Рис. 9

(Графики функций $y = x$ и $y = -x$ необходимо хорошо помнить).

Отметим также, что при положительных значениях k, чем больше k, тем «круче» идет прямая $y = kx + b$. На рис. 10 приведены графики функций $y = \frac{1}{2}x$, $y = x$, $y = 2x$ и $y = 3x$. Самый «пологий» из них – это график $y = \frac{1}{2}x$, самый «крутой» – $y = 3x$.

При отрицательных k – наоборот: чем меньше значение k, тем более круто идет прямая по отношению к оси Ox. На рис. 11 приведены графики функций $y = -\frac{1}{2}x$, $y = -x$, $y = -2x$ и $y = -3x$. Наиболее круто к оси Ox идет график $y = -3x$, а наиболее полого $y = -\frac{1}{2}x$ (рис. 11).

Заметим, что в уравнении $y = kx + b$ величина b на угол наклона не влияет!

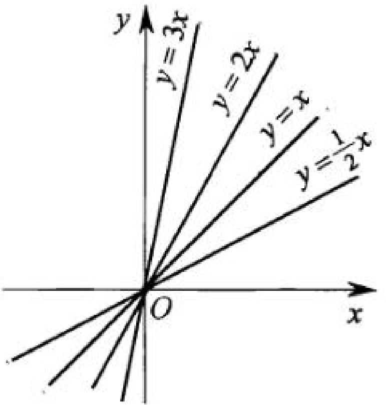


Рис. 10

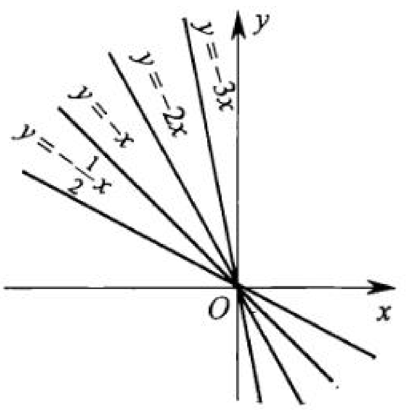


Рис. 11

§ 5. ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ

Эти задачи часто возникают при исследовании уравнений и неравенств с параметрами графическими методами.

Задача 3. Найти уравнение прямой, проходящей через точки $A\ (2;\ 3)$ и $B\ (-6;\ -1)$.

Решение. Общее уравнение прямой имеет вид $y = kx + b$. Нам надо найти k и b. Так как точки $A\ (2;\ 3)$ и $B\ (-6;\ -1)$ лежат на прямой $y = kx + b$, то их координаты удовлетворяют этому уравнению. Имеем систему $\begin{cases} 3 = 2k + b \\ -1 = -6k + b \end{cases}$. Откуда находим $k = 0{,}5;\ b = 2$.

Итак, уравнение искомой прямой имеет вид $y = 0{,}5x + 2$. Она изображена на рис. 12.

Задача 4. При каких a прямая $y = (3a - 7)x + 2a - 5$:

a) проходит через точку $M\ (2;\ 5)$;

b) проходит выше точки M;

c) проходит ниже точки M.

Решение.

a) Прямая $y = (3a - 7)x + 2a - 5$ проходит через точку $M\ (2;\ 5)$, если координаты точки M удовлетворяют уравнению этой прямой (рис. 13). Имеем $5 = (3a - 7)\cdot 2 + 2a - 5$. Отсюда находим $a = 3$.

b) Прямая $y = (3a - 7)x + 2a - 5$ проходит выше точки $M(2; 5)$, если ордината y прямой в точке $x = 2$ будет больше, чем 5 (рис. 14). Имеем

$$y(2) = (3a - 7) \cdot 2 + 2a - 5 > 5 \Leftrightarrow 8a - 19 > 5 \Leftrightarrow a > 3.$$

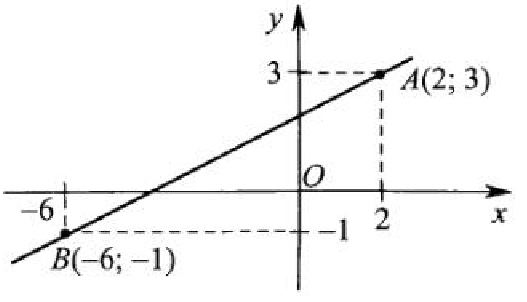


Рис. 12

c) Аналогично, прямая $y = (3a - 7)x + 2a - 5$ проходит ниже точки $M(2; 5)$, если $y(2) < 5$ (рис. 15). Имеем $y(2) = (3a - 7) \cdot 2 + 2a - 5 < 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a < 3$.

Ответ:
при $a = 3$ прямая проходит через точку M;
при $a > 3$ проходит выше точки M;
при $a < 3$ проходит ниже точки M.

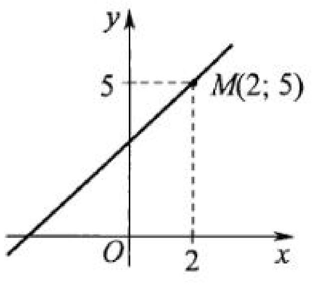


Рис. 13

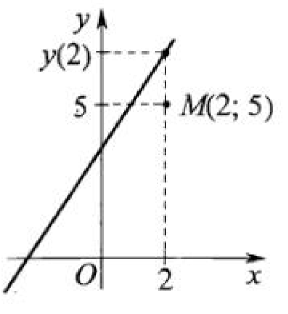


Рис. 14

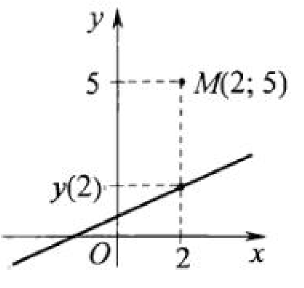


Рис. 15

Задача 5. При каких a прямая $y = (3a - 7)x + 2a - 5$ проходит ниже точки $M(2; 5)$, но выше точки $N(6; 7)$.

Решение. Прямая $y = (3a - 7)x + 2a - 5$ проходит ниже точки $M(2; 5)$ и выше точки $N(6; 7)$ (рис. 16), если выполняется система неравенств:

$$\begin{cases} y(2)=(3a-7)2+2a-5<5 \\ y(6)=(3a-7)6+2a-5>7 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a<3 \\ a>\dfrac{27}{10} \end{cases} \Leftrightarrow a\in\left(\frac{27}{10};3\right)$$

Ответ: $a\in\left(\dfrac{27}{10};3\right)$.

§ 6. ПАРАЛЛЕЛЬНОСТЬ И ПЕРПЕНДИКУЛЯРНОСТЬ ПРЯМЫХ

Пусть даны две прямые l_1 и l_2, заданные соответственно уравнениями $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$. В каком случае прямые l_1 и l_2 параллельны? Пусть φ_1 и φ_2 углы, которые образуют прямые l_1 и l_2 с осью Ox (рис. 17). В школьном курсе геометрии доказывается, что если $\varphi_1 = \varphi_2$ (эти углы называются соответственными), то прямые l_1 и l_2 – параллельны. Условие $\varphi_1 = \varphi_2$ равносильно тому, что $\operatorname{tg}\varphi_1 = \operatorname{tg}\varphi_2$, а последнее означает, что $k_1 = k_2$. Итак, прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ параллельны, если $k_1 = k_2$. Например, прямые $y = 0{,}5 - 3x$ и $2y + 6x = 7$ параллельны, т. к. уравнение $2y + 6x = 7$ легко приводится к виду $y = -3x + 3{,}5$ и мы имеем $k_1 = k_2 = -3$. Заметим, что значение b на параллельность прямых не оказывает влияния.

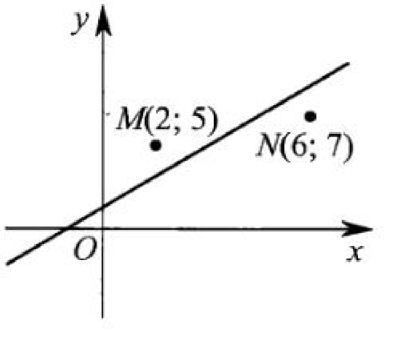


Рис. 16

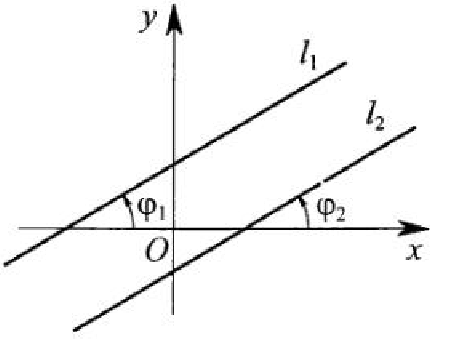


Рис. 17

Прямые $y = k_1x + b_1$ и $y = k_2x + b_2$ перпендикулярны, если $k_1 \cdot k_2 = -1$. Например, прямые $y = 3x - 2$ и $y=-\frac{1}{3}x+4$ перпендикулярны, т. к. $k_1\cdot k_2 = 3\cdot(-\frac{1}{3}) = -1$.

Графические методы особенно эффективны при исследовании уравнений и неравенств, содержащих модули. Они позволяют сразу отобрать нужные для решения случаи, и не заниматься перебором всех случаев, которые имеют место при формальном раскрытии модулей. Поэтому для решения задач надо уметь строить графики функций с модулями. Конечно, имеются различные приемы, упрощающие построение таких графиков (см., например, [3; 8]). Мы же будем строить их, исходя непосредственно из определения модуля. Часто такое построение более длинно и громоздко, но зато не уведет нас далеко в сторону от основной темы книги – задач с параметрами.

Определение. Модуль положительного числа a равен самому этому числу a. Модуль 0 равен 0. Модуль отрицательного числа a равен противоположному ему положительному числу $(-a)$.

Это определение можно записать короче, используя знак модуля:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a > 0 \\ 0, \text{ если } a = 0 \\ -a, \text{ если } a < 0 \end{cases}. \qquad (3)$$

При решении задач удобнее пользоваться равносильным ему определением:

$$|a| = \begin{cases} a, \text{ если } a \ge 0 \\ -a, \text{ если } a \le 0 \end{cases}. \qquad (4)$$

В определении (4) значение $a = 0$ включено в первую и вторую строчки. Легко видеть, что определения (3) и (4) равносильны.

Задача 6. Нарисовать график функции $y = |2x-5|$.

Решение. Раскроем знак модуля.

<u>*Случай* I</u>. $2x-5 \ge 0$, т. е. $x \ge 2{,}5$. При этих x имеем $|2x-5| = 2x-5$.

<u>*Случай* II</u>. $2x-5 \le 0$, т. е. $x \le 2{,}5$. Тогда $|2x-5| = 5-2x$.

Итак, наша функция $y = |2x-5|$ совпадает с прямой $y = 2x - 5$, при $x \ge 2{,}5$ и с прямой $y = 5 - 2x$ при $x \le 2{,}5$:

$$y = \begin{cases} 2x-5 \text{ при } x \ge 2{,}5 \\ 5-2x \text{ при } x \le 2{,}5 \end{cases}.$$

Нарисуем прямую $y = 2x-5$ при $x \ge 2{,}5$. Возьмем две точки, принадлежащие этой прямой:

1) $x = 2{,}5 \Rightarrow y = 2 \cdot 2{,}5 - 5 = 0$; 2) $x = 4 \Rightarrow y = 2 \cdot 4 - 5 = 3$.

Проведя через эти точки прямую, получим правую ветвь нашего графика (рис. 18).

Нарисуем прямую $y = 5-2x$ на множестве $x \le 2{,}5$. Имеем

1) $x = 2{,}5 \Rightarrow y(2{,}5) = 5 - 2 \cdot 2{,}5 = 0$; 2) $x = 1 \Rightarrow y(1) = 5 - 2 \cdot 1 = 3$.

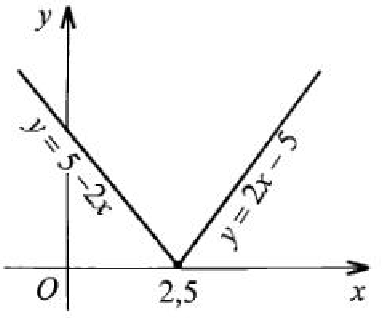


Рис. 18

Проведя через эти точки прямую, получим левую ветвь графика (рис. 18). Часто такой график называют «уголком». Вершина этого уголка находится в точке $x = 2{,}5$.

То же самое верно и в общем виде. Нетрудно показать, что график $y = a|x - b|$ при любом $a \neq 0$ будет иметь вид уголка. При этом, если $a > 0$, то его ветви будут направлены вверх (рис. 19), если $a < 0$ – вниз (рис. 20). Вершина уголка будет в точке $x = b$.

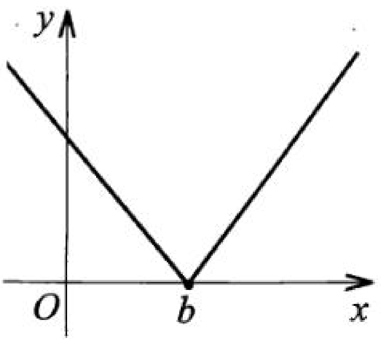


Рис. 19 $y = a|x - b|$, $a > 0$

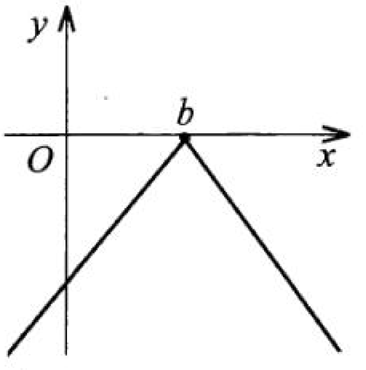


Рис. 20 $y = a|x - b|$, $a < 0$

Задача 7. Построить график функции

$$y = |2x + 8| + |2x - 6| . \qquad (5)$$

Решение. Раскроем знак модуля обоих выражений. Для этого приравняем к нулю оба выражения под знаками модуля:

1) $2x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4$; 2) $2x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 3$.

Нанесем точки $x = -4$ и $x = 3$ на числовую прямую (рис. 21). Они разбили числовую прямую на три промежутка.

1. При $x \geq 3$ оба выражения $2x + 8$ и $2x - 6$ будут неотрицательны. Поэтому $|2x+8| = 2x+8, |2x-6| = 2x-6$. Следовательно, $y = 2x + 8 + 2x - 6 = = 4x + 2$.

2. При $-4 \leq x \leq 3$ выражение $2x+8 \geq 0$, а выражение $2x-6 \leq 0$. Поэтому $|2x+8| = 2x+8, |2x-6| = 6-2x$. Следовательно, $y = 2x + 8 + 6 - 2x = =14$.

3. При $x \leq -3$ имеем $2x+8 \leq 0$ и $2x-6 \leq 0$. Поэтому $|2x+8| = -2x-8$, $|2x-6| = 6-2x$. Следовательно, $y = -2x - 8 + 6 - 2x = =-4x - 2$.

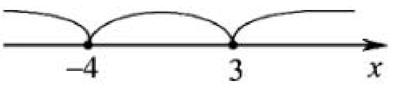


Рис. 21

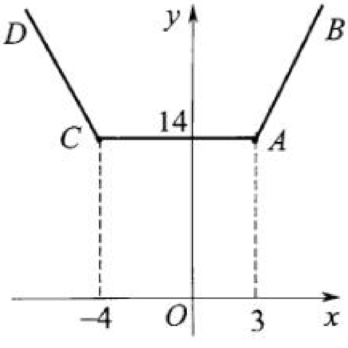


Рис. 22

Итак, исходную функцию можно записать в виде:

$$y = \begin{cases} 4x+2 \text{ при } x \geq 3 \\ 14 \text{ при } -4 \leq x \leq 3 \\ -4x-2 \text{ при } x \leq -4 \end{cases}.$$

Теперь легко построить искомый график. Построим прямую $y = 4x + 2$ на множестве $x \geq 3$. Имеем $y(3) = 4 \cdot 3 + 2 = 14$ и $y(4) = 4 \cdot 4 + 2 = 18$. Проведем через эти точки прямую AB (рис. 22).

На множестве $x \in [-4; 3]$ функция тождественно равна 14. На рис. 22 это отрезок CA.

И, наконец, построим прямую $y = -4x - 2$ на множестве $x \leq -4$. Имеем $y(-4) = 14$ и $y(-5) = 18$. Проведем через эти две точки прямую CD (рис. 22). В силу зрительного сходства график этой функции иногда называют «корытом».

§ 7. ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Пусть нам надо решить уравнение

$$f(x) = g(x)\,. \tag{6}$$

Если построить графики $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$, то число решений уравнения (6) в точности равно числу пересечений этих графиков, а сами корни – это абсциссы точек пересечения. Это проиллюстрировано на рис. 23.

Графики $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$, пересекаются в трех точках A, B и C. Следовательно, уравнение $f(x) = g(x)$ имеет три корня. А сами корни – это абсциссы точек пересечения. В нашем примере это числа x_1, x_2 и x_3. Действительно, в точках x_1, x_2 и x_3 имеют место равенства $f(x_1) = g(x_1)$, $f(x_2) = g(x_2)$, $f(x_3) = g(x_3)$. Это и означает, что x_1, x_2 и x_3 – корни. В других точках $f(x) \neq g(x)$.

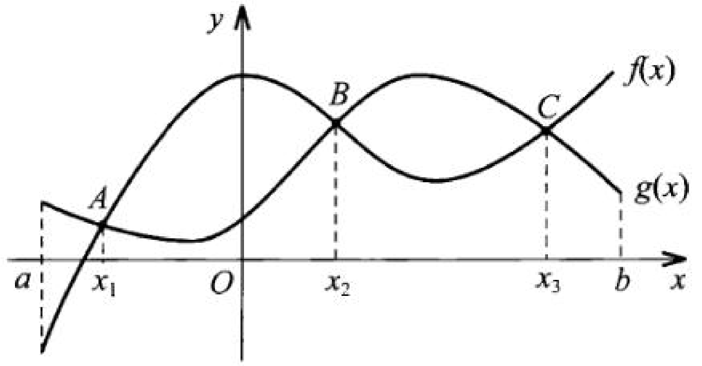


Рис. 23

Аналогичная картина имеет место и при решении неравенств. Пусть нам надо решить неравенство $f(x) < g(x)$. Построив графики функций $y_1 = f(x)$ и $y_2 = g(x)$ (рис. 23), мы должны найти все точки x, при которых график y_2 находится выше графика y_1. На рис. 23 видно, что этим множеством будет объединение промежутков $[a;\, x_1) \cup (x_2;\, x_3)$. Чтобы сказанное было понятнее, рассмотрим несколько примеров решения уравнений и неравенств без параметров.

Задача 8. Решить графически уравнение

$$|2x + 8| + |2x - 6| = 2x + 11\,.$$

Решение. Нарисуем графики функций $y_1 = |2x + 8| + |2x - 6|$ и $y_2 = 2x + 11$. График y_1 нами был построен в задаче 11. График $y_2 = 2x + 11$ легко строится по двум точкам: 1) $x = 0$, тогда $y = 11$, 2) $y = 0$, тогда $x = -5{,}5$ (рис. 24). Мы видим, что графики y_1 и y_2 пересекаются в двух точках. Следовательно, исходное уравнение имеет два корня. При этом корнями будут абсциссы точек пересечения графиков y_1 и y_2. Сначала найдем точку пересечения прямой $y_2 = 2x + 11$ с правой ветвью графика y_1. Правая ветвь задается уравнением $y_1 = 4x + 2$. Приравняв $y_1 = y_2 \Leftrightarrow 4x + 2 = 2x + 11$, находим первый корень $x_1 = 4{,}5$.

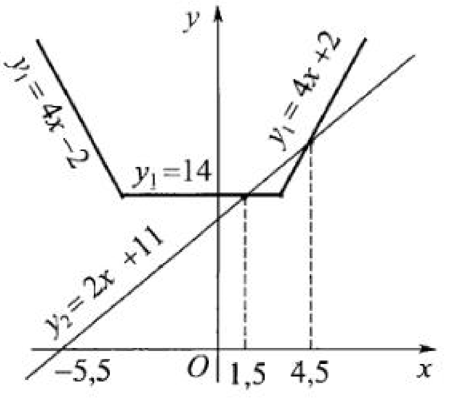


Рис. 24

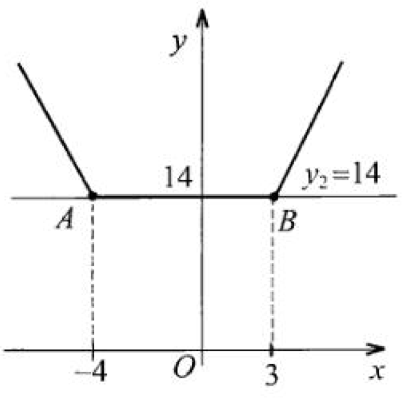


Рис. 25

На промежутке $x \in [-4; 3]$ функция y_1 задается уравнением $y_1 = 14$. Приравняв $2x + 11 = 14$, находим второй корень $x_2 = 1{,}5$ (рис. 24).

Из графика видно, что с левой ветвью графика y_1 прямая $y_2 = 2x + 11$ не пересекается.

Ответ: $x_1 = 4{,}5; x_2 = 1{,}5$.

Задача 9. Решить графически неравенство

$$|2x + 8| + |2x - 6| \le 2x + 11 .$$

Решение. Воспользуемся еще раз графиками функций $y_2 = 2x + 11$ и $y_1 = |2x + 8| + |2x - 6|$ на рис. 24. Точки пересечения этих графиков (см. задачу 8) $x_1 = 4{,}5$ и $x_2 = 1{,}5$. Нам надо найти все значения x, при которых $y_1 \le y_2$. По графикам на рис. 24 видно, что это имеет место при $x \in [1{,}5; 4{,}5]$.

Ответ: $x \in [1{,}5; 4{,}5]$.

Задача 10. Решить графически уравнение

$$|2x + 8| + |2x - 6| = 14 .$$

Решение. Воспользовавшись графиками $y_1 = |2x + 8| + |2x - 6|$ и $y_2 = 14$ на рис. 25, видим, что они пересекаются в бесконечном числе точек (по всему отрезку AB). Абсциссы всех этих точек пересечения, а это промежуток $x \in [-4; 3]$, и есть решения этого уравнения.

Ответ: $x \in [-4; 3]$.

Перейдем теперь к решению уравнений и неравенств с параметрами методом сечений.

§ 8. СЕЧЕНИЕ СЕМЕЙСТВОМ ПРЯМЫХ $y = a$

При каждом значении a график функции $y = a$ представляет собой прямую, параллельную оси Ox. При разных a это разные прямые. Поэтому, когда a «пробегает» некоторое множество значений, уравнение $y = a$ определяет на плоскости некоторое множество или семейство прямых, параллельных оси Ox.

Задача 11. В зависимости от значений параметра a определить число решений уравнения

$$|2x + 8| + |2x - 6| = a.$$

Решение. Нарисуем графики функций $y_1 = |2x + 8| + |2x - 6|$ и $y_2 = a$ (рис. 26). График y_1 мы уже много раз строили. График $y_2 = a$ при каждом значении a представляет собой прямую, параллельную оси x. При разных значениях a – разные прямые.

Число решений уравнения совпадает с числом пересечений графиков y_1 и y_2. Анализируя графики на рис. 26, получаем следующее

1. При $a < 14$ решений нет, т. к. графики y_1 и y_2 не пересекаются (прямая l_1).

2. При $a > 14$, графики y_1 и y_2 пересекаются в двух точках (прямая l_2). Следовательно, при этих a уравнение имеет два решения.

3. И, наконец, при $a = 14$ графики y_1 и y_2 пересекаются по отрезку AB (прямая l_3). Следовательно, уравнение имеет бесконечное число решений.

Ответ: $\left|\begin{array}{l} \text{при } a > 14 \text{ два решения;} \\ \text{при } a = 14 \text{ решений бесконечно;} \\ \text{при } a < 14 \text{ решений нет.} \end{array}\right.$

Задача 12. При всех a решить уравнение $|2x + 8| + |2x - 6| = a$.

Решение. Эта задача является продолжением и детализацией предыдущей задачи. Теперь нам надо найти не только число решений уравнения, но и сами эти решения. Опять нарисуем графики $y_1 = |2x + 8| + |2x - 6|$ и $y_2 = a$ (рис. 27). Как мы видели в предыдущей задаче:

1. При $a > 14$ уравнение имеет два решения. При этом решениями будут абсциссы точек пересечения графиков y_1 и y_2. Найдем их. Левая ветвь графика y_1 задается уравнением $y_1 = -4x - 2$. Чтобы найти точку пересечения,

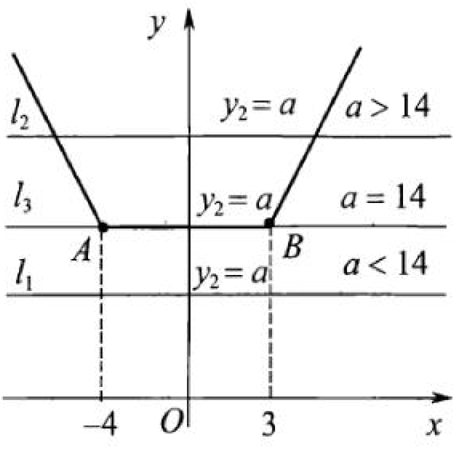


Рис. 26

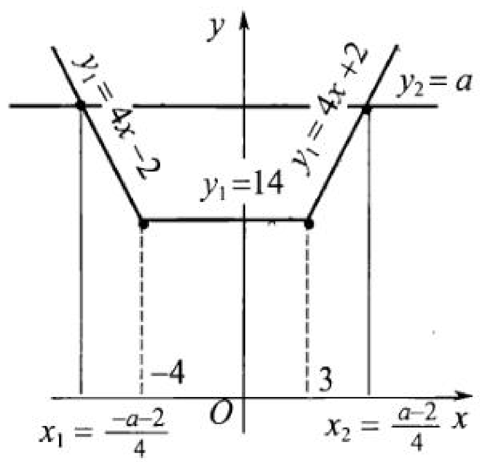


Рис. 27

приравняем $y_1 = y_2$. Имеем, $-4x - 2 = a$, откуда $4x = -a - 2$ и $x_1 = \dfrac{-a-2}{4}$ – первый корень нашего уравнения (рис. 27).

Правая ветвь графика задается уравнением $y_1 = 4x + 2$. Имеем $4x + 2 = a$. Откуда находим $x_2 = \dfrac{a-2}{4}$ – второй корень уравнения (рис. 27). Итак, при $a > 14$ уравнение имеет два корня $x_1 = \dfrac{-a-2}{4}$ и $x_2 = \dfrac{a-2}{4}$.

2. При $a = 14$ прямая $y_2 = a$ на промежутке $[-4; 3]$ совпадает с «дном» графика y_1. Все значения x из этого промежутка и будут множеством решений при $a = 14$.

3. При $a < 14$ – решений нет.

Ответ:
при $a > 14$ два решения $x_1 = \dfrac{-a-2}{4}$, $x_2 = \dfrac{a-2}{4}$;
при $a = 14$ решениями являются $x \in [-4; 3]$;
при $a < 14$ решений нет.

Еще раз посмотрим на решения последних двух задач. Суть их сводилась к следующему. Мы построили графики функций $y_1 = |2x + 8| + |2x - 6|$ и $y_2 = a$. График функции y_1 представляет собой ломаную линию, не зависящую от параметра. График $y_2 = a$ при каждом значении a есть прямая, параллельная оси Ox. И мы пересекали график y_1 графиком y_2. Поскольку при разных значениях a прямые $y_2 = a$ будут разными, то можно сказать, что мы пересекаем график семейством прямых $y_2 = a$, параллельных оси Ox (отсюда и название – метод сечений). Число точек пересечения графиков y_1 и y_2 совпадает с числом корней уравнения. При различных a это могут быть разные числа. В задаче 1 мы видели, что прямые $y_2 = a$ при $a > 14$ пересекают график y_1 в двух точках, а при $a < 14$ вообще не пересекают график y_1. Находя теперь абсциссы точек пересечения этих графиков, мы находим сами корни уравнения, которые, естественно, зависят от параметра a.

Эта идея лежит в решении всех уравнений с параметрами $f(x) = g(x)$ методом сечений. Отличия же различных задач друг от друга состоят только в следующих двух моментах: 1) какая функция взята в качестве $y_1 = f(x)$ и 2) каким семейством кривых $y_2 = g(x)$ (или прямых) мы будем пересекать график функции y_1.

В этой и последующих главах мы рассмотрим наиболее часто встречающиеся семейства: $y = a$, $y = x + a$, $y = ax$, $y = |x - a|$, $x^2 + y^2 = a^2$, $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ и некоторые другие.

Те же самые соображения используются и при решении неравенств $f(x) < g(x)$. Только при решении неравенств мы ищем промежутки, на которых график функции $y_1 = f(x)$ находится ниже графика $y_2 = g(x)$.

Задача 13. При всех a решить неравенство

$$|2x + 8| + |2x - 6| < a .$$

Решение. Нам надо найти все x, при которых график $y_1 = |2x + 8| + |2x - 6|$ находится ниже графика $y_2 = a$. Воспользовавшись графиками на рис. 27, мы видим, что при $a > 14$ решениями будут $x \in (\frac{-a-2}{4}; \frac{a-2}{4})$, а при $a \leq 14$ решений нет.

Ответ: $\left| \begin{array}{l} \text{при } a > 14 \text{ решениями являются } x \in (\frac{-a-2}{4}; \frac{a-2}{4}), \\ \text{при } a \leq 14 \text{ решений нет.} \end{array} \right.$

Рассмотрим еще ряд задач. При решении всех этих задач придется строить графики функций. Поэтому, чтобы решения не были очень громоздкими, мы часто будем выделять построение графиков в отдельные задачи.

Задача 14. Построить график функции $y=\left|x^2-10x+16\right|$.

Решение. Раскроем знак модуля. _Случай I._ $x^2-10x+16\geq 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x\in(-\infty;\,2]\cup[8;\,+\infty)$. Тогда $\left|x^2-10x+16\right|=x^2-10x+16$. _Случай II._ $x^2-10x+16\leq 0 \Leftrightarrow x\in[2;8]$. Тогда $\left|x^2-10x+16\right|=-x^2+10x-16$.

Итак, нашу функцию можно записать в виде:

$$y=\begin{cases} x^2-10x+16 \text{ при } x\in(-\infty;2]\cup[8;+\infty) \\ -x^2+10x-16 \text{ при } x\in[2;8] \end{cases}.$$

А) Нарисуем параболу $y=x^2-10x+16$ и возьмем ту её часть, которая находится на множестве $x\in(-\infty;2]\cup[8;+\infty)$. Имеем,

$$x_в=-\frac{b}{2a}=5\Rightarrow y_в=5^2-10\cdot 5+16=-9.$$

Точки пересечения с осями:

1. $x=0\Rightarrow y=16$. 2. $y=0\Rightarrow x^2-10x+16=0$, $x_1=2$; $x_2=8$.

Ветви параболы направлены вверх (рис. 28).

В) Нарисуем график $y=-x^2+10x-16$ на множестве $x\in[2;8]$. Имеем, $x_в=-\frac{b}{2a}=5\Rightarrow y_в=-5^2+10\cdot 5-16=9$. Точки пересечения с осями:

1. $x=0\Rightarrow y=-16$. 2. $y=0\Rightarrow -x^2+10x-16=0$ $x_1=2$; $x_2=8$.

Ветви параболы направлены вниз.

Искомый график на рис. 28 нарисован сплошной линией.

Замечание. Школьники, которые знают приемы построения графиков с модулями, могли бы построить график $y=|x^2-10x+16|$ проще. Сначала построить график $y=x^2-10x+16$, а затем ту его часть, которая находится под осью Ox, симметрично отобразить относительно оси Ox.

Задача 15. Определить, при каких значениях a уравнение

$$\left|x^2-10x+16\right|=a^2-8a \tag{7}$$

имеет более двух решений.

Решение. Нарисуем графики функций $y_1 = |x^2 - 10x + 16|$ и $y_2 = a^2 - 8a$. Построение графика y_1 мы разбирали в предыдущей задаче.

Заметим, что функция y_2 не зависит от x. Поэтому в системе координат xOy график функции y_2 представляет собой семейство прямых параллельных оси Ox. Обозначим для удобства $c = a^2 - 4a$. Тогда $y_2 = c$. Оба графика представлены на рис. 29.

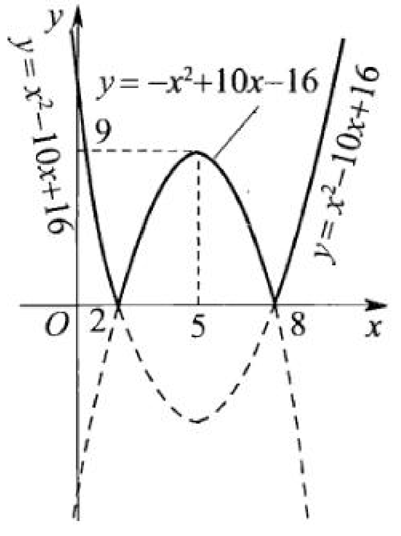


Рис. 28

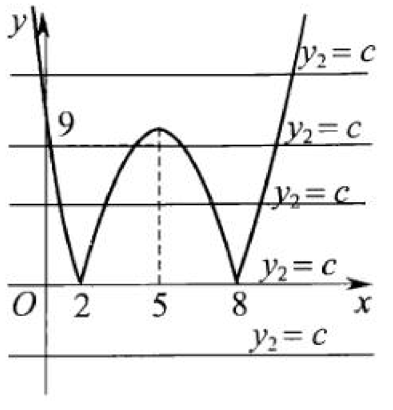


Рис. 29

Очевидно (рис. 29), что в зависимости от c уравнение может не иметь решений, иметь два, три или четыре решения. Три решения уравнение имеет, когда прямая $y_2 = c$ касается вершины параболы (рис. 29). Это имеет место при $c = 9$. Четыре решения будут при $0 < c < 9$. Объединив эти два случая, получаем $0 < c \le 9$. Подставив $c = a^2 - 8a$, получаем двойное неравенство $0 < a^2 - 8a \le 9$. Решением его будут $a \in [-1; 0) \cup (8; 9]$.

Ответ: при $a \in [-1; 0) \cup (8; 9]$ уравнение имеет более двух решений.

§ 9. СЕЧЕНИЕ СЕМЕЙСТВОМ ПРЯМЫХ $y = x + a$

Задача 16. Построить график функции

$$y = ||x - 5| - 1| + 4\,. \tag{8}$$

Решение. Построим этот график, последовательно раскрывая модули.

<u>Случай I</u>. $x - 5 \ge 0$, т. е. $x \ge 5$. При этих значениях x имеем $|x - 5| = x - 5$, и наша функция имеет вид:

$$y = |x - 5 - 1| + 4 = |x - 6| + 4 . \tag{9}$$

Теперь, с учетом того, что $x \geq 5$, раскроем $|x - 6|$.

A) $x - 6 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq 6$. Тогда $|x - 6| = x - 6$ и функция (9) имеет вид $y = x - 6 + 4 = x - 2$.

B) $x - 6 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 6$. Тогда $|x - 6| = 6 - x$ и функция (9) имеет вид $y = 6 - x + 4 = 10 - x$.

Учитывая условие $x \geq 5$, получаем, что на промежутке $[5; 6]$ исходная функция имеет вид $y = 10 - x$. Следовательно:

$$y = \begin{cases} x - 2 \text{ при } x \geq 6 \\ 10 - x \text{ при } 5 \leq x \leq 6 \end{cases} .$$

<u>*Случай* II</u>. $x - 5 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq 5$. Тогда $|x - 5| = 5 - x$ и исходная функция имеет вид:

$$y = |5 - x - 1| + 4 = |4 - x| + 4 .$$

Рассматривая теперь $4 - x \geq 0$ и $4 - x \leq 0$, получаем:

A) $4 - x \geq 0 \Leftrightarrow x \leq 4$. Тогда $|4 - x| = 4 - x$ и наша функция имеет вид $y = 4 - x + 4 = 8 - x$.

B) $4 - x \leq 0 \Leftrightarrow x \geq 4$. Тогда $|4 - x| = x - 4$ и наша функция имеет вид $y = x - 4 + 4 = x$.

Учитывая условие $x \leq 5$, получаем, что на множестве $4 \leq x \leq 5$ исходная функция имеет вид $y = x$.

Итак, раскрыв модули, мы получили:

$$y = \begin{cases} x - 2 \text{ при } x \geq 6 \\ 10 - x \text{ при } 5 \leq x \leq 6 \\ x \text{ при } 4 \leq x \leq 5 \\ 8 - x \text{ при } x \leq 4 \end{cases} . \tag{10}$$

Теперь построение очевидно.

1. Построим функцию $y = x - 2$ на множестве $x \geq 6$. Взяв $x = 6$, $y = 6 - 2 = 4$ (точка A) и $x = 7$; $y = 7 - 2 = 5$ (точка T), проведем через эти точки прямую, получим кусок графика, луч AT (рис. 30).

2. Построим функцию $y = 10 - x$ на множестве $x \in [5; 6]$. Имеем

a) $x = 6 \Rightarrow y = 10 - 6 = 4$ (точка A).

b) $x = 5 \Rightarrow y = 10 - 5 = 5$ (точка B).

Соединив точки B и A, получим еще одну часть графика – отрезок BA (рис. 30).

3. Построим функцию $y = x$ на отрезке $x \in [4; 5]$. Имеем

a) $x = 5 \Rightarrow y = 5$ (точка B).

b) $x = 4 \Rightarrow y = 4$ (точка C).

Соединив точки C и B, получим отрезок CB (рис. 30).

4. И, наконец, аналогично построив график функции $y = 8 - x$ на промежутке $x \in (-\infty; 4]$, получим последнюю часть графика, луч KC (рис. 30).

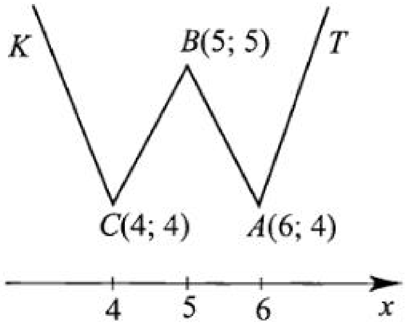


Рис. 30

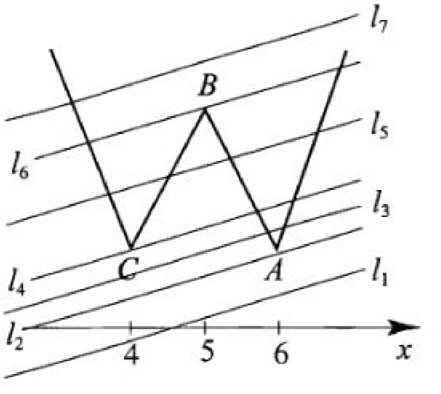


Рис. 31

Задача 17. При всех значениях параметра a определить число решений уравнения

$$||x - 5| - 1| + 4 = \frac{x}{2} + a. \tag{11}$$

Решение. Нарисуем графики функций $y_1 = ||x - 5| - 1| + 4$ и $y_2 = \frac{x}{2} + a$.

Построение графика y_1 мы подробно рассмотрели в предыдущей задаче. График функции $y_2 = \frac{x}{2} + a$ при каждом a представляет собой прямую с угловым коэффициентом $k = \frac{1}{2}$.

1. Когда прямая $y_2 = \frac{x}{2} + a$ проходит ниже точки A (рис. 31, прямая l_1), решений нет. Это имеет место, когда

$$y_2(6) < 4 \Leftrightarrow \frac{6}{2} + a < 4 \Leftrightarrow a < 1.$$

2. Когда прямая $y_2 = \frac{x}{2} + a$ проходит через точку A (рис. 31, прямая l_2), уравнение имеет одно решение. Имеем, $y_2(6) = 4 \Leftrightarrow \frac{6}{2} + a = 4 \Leftrightarrow a = 1$.

3. Если прямая $y_2 = \frac{x}{2} + a$ идет выше точки A, но ниже точки C (прямая l_3), уравнение (11) имеет два решения. Последнее имеет место, когда $y_2(6) > 4$ и $y_2(4) < 4$. Имеем

$$\begin{cases} \frac{6}{2} + a > 4 \\ \frac{4}{2} + a < 4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a > 1 \\ a < 2 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (1;2).$$

4. Когда прямая $y_2 = \frac{x}{2} + a$ проходит через точку C (прямая l_4), уравнение имеет три решения. Это будет при выполнении равенства $\frac{4}{2} + a = 4 \Leftrightarrow a = 2$.

5. Если прямая $y_2 = \frac{x}{2} + a$ проходит выше точки C, но ниже точки B (прямая l_5), исходное уравнение имеет четыре решения. Последнее имеет место, когда

$$\begin{cases} y_2(4) > 4 \\ y_2(5) < 5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{4}{2} + a > 4 \\ \frac{5}{2} + a < 4 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (2;2{,}5).$$

6. Если прямая $y_2 = \frac{x}{2} + a$ проходит через точку A (прямая l_6), уравнение имеет три решения. Последнее имеет место при $y_2(5) = 5 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow \frac{5}{2} + a = 5 \Leftrightarrow a = 2{,}5$.

7. Когда прямая $y_2 = \frac{x}{2} + a$ проходит выше точки B (прямая l_7), уравнение снова имеет два решения. Это будет при выполнении неравенства $y_2(5) > 5 \Leftrightarrow \frac{5}{2} + a > 5 \Leftrightarrow a > 2{,}5$.

Собрав воедино все полученные результаты, получаем

Ответ:
при $a<1$ нет решений;
при $a=1$ уравнение имеет одно решение;
при $a\in(1;2)$ и $a\in(2,5;+\infty)$ уравнение имеет два решения;
при $a=2$ и $a=2,5$ уравнение имеет три решения;
при $a\in[2;2,5]$ уравнение имеет четыре решения.

Задача 18. При всех a решить уравнение

$$|x+4a-1|=\frac{2x}{3}+3a-2.$$

Решение этой задачи, как и предыдущих, состоит из трех стандартных шагов. На первом шаге мы нарисуем графики функций $y_1=|x+4a-1|$ и $y_2=\frac{2x}{3}+3a-2$. На втором рассмотрим, в скольких точках пересекаются эти графики при разных значениях a. И на третьем найдем координаты точек пересечения этих графиков. Абсциссы этих точек и будут решениями. Реализуем сказанное.

1. Графиком функции $y_1=|x+4a-1|$ будет уголок. Координаты вершины этого уголка $x_в=1-4a$, $y_в=0$. Раскрыв знак модуля, получаем:

$$y_1=\begin{cases}x+4a-1 \text{ при } x+4a-1\geq 0, \text{ т.е. } x\geq 1-4a \text{ - правая ветвь уголка}\\ -x-4a+1 \text{ при } x-4a-1\leq 0, \text{ т.е. } x\leq 1-4a \text{ - левая ветвь уголка}\end{cases}.$$

Поскольку при разных значениях a это будут разные уголки с вершиной на оси Ox, то можно сказать, что с изменением a уголки «движутся» вдоль оси Ox.

Графиком $y_2=\frac{2x}{3}+3a-2$ является прямая с угловым коэффициентом $k=\frac{2}{3}$. При изменении a она будет перемещаться вверх или вниз вдоль оси Oy (рис. 32).

Таким образом, в данной задаче оба графика y_1 и y_2 зависят от параметра a и при изменении a будут сдвигаться: график y_1 вдоль оси Ox, а график y_2 – вдоль оси Oy. Однако на решение задачи это не влияет.

2. Найдем в зависимости от a число пересечений этих графиков.

а) Если прямая $y_2=\frac{2x}{3}+3a-2$ проходит ниже вершины уголка A (прямая l_1 на рис. 32), то графики не пересекаются. Это будет, если значение функции y_2 в вершине $x_в=1-4a$ меньше нуля. Имеем

$$y_2(1-4a)=\frac{2}{3}(1-4a)+3a-2<0 \Leftrightarrow a<4.$$

b) Если прямая y_2 проходит через вершину A, уравнение будет иметь одно решение (прямая l_2 на рис. 32). Это имеет место, если $y_2(1-4a)=0$. Имеем

$$y_2(1-4a)=\frac{2}{3}(1-4a)+3a-2=0 \Leftrightarrow a=4.$$

Решением в этом случае будет абсцисса вершины уголка. Подставляя a=4, находим $x=1-4\cdot 4=-15$.

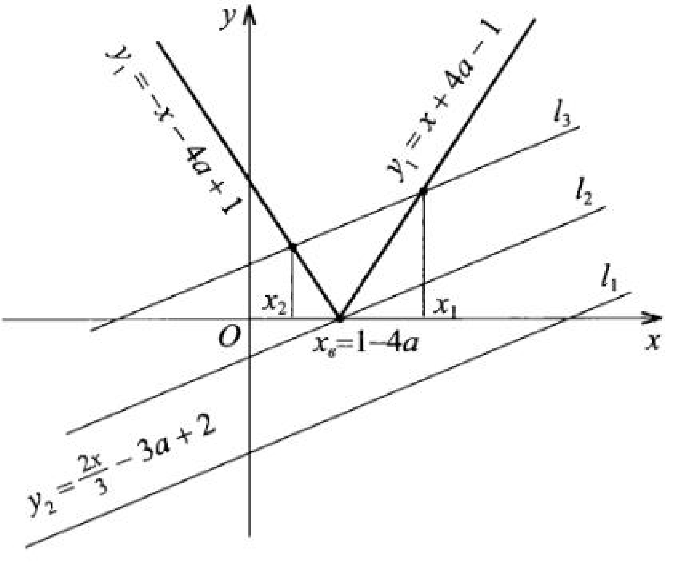


Рис. 32

c) Если прямая $y_2=\dfrac{2x}{3}+3a-2$ проходит выше вершины A то она будет пересекаться с двумя ветвями уголка (прямая l_3 на рис. 32) и уравнение будет иметь два решения. Последнее имеет место, если $y_2(1-4a)=\dfrac{2}{3}(1-4a)+3a-2>0 \Leftrightarrow a>4$.

Найдем точки пересечения этой прямой с ветвями уголка. Пересечение прямой $y_2=\dfrac{2x}{3}+3a-2$ и левой ветви $y_1=-x-4a+1$ будет при $y_1=y_2 \Leftrightarrow \dfrac{2x}{3}+3a-2=-x-4a+1$. Откуда находим $x_1=\dfrac{9-21a}{5}$ – первый корень уравнения. Пересечение с правой ветвью $y_1=x+4a-1$ будет, когда $\frac{2x}{3}+3a-2=x+4a-1$. Из этого равенства находим второй корень исходного уравнения $x_2=-3a-3$.

Ответ:
при $a<4$ решений нет;
при $a=4$ уравнение имеет одно решение $x=-15$;
при $a>4$ два решения $x_1=-3a-3$ и $x_2=\frac{9-21a}{5}$.

Задача 19. При всех a решить неравенство

$$x+4a+1\le\frac{2x}{3}+3a-2. \qquad (12)$$

Решение. Надо найти все x, при которых график $y_1=|x+4a+1|$ находится ниже графика $y_2=\frac{2x}{3}+3a-2$ (или совпадает с ним, т.к. неравенство нестрогое). Воспользуемся результатами предыдущей задачи.

1. В пункте а) предыдущей задачи мы выяснили, что при $a<4$ график y_1 при всех x выше графика y_2 (рис. 32, прямая l_1). Поэтому, при $a<4$ неравенство (12) решений не имеет.

2. В пункте б) мы нашли, что при $a=4$ прямая $y_2=\frac{2x}{3}+3a-2$ проходит через вершину уголка (прямая l_2 на рис. 32). Поэтому решением неравенства при $a=4$ будет одна точка $x=-15$ – абсцисса вершины уголка.

3. В пункте в) мы выяснили, что при $a>4$ уравнение имеет два корня $x_1=\frac{9-21a}{5}$ и $x_2=-3a-3$ (прямая l_3 на рис. 32). А решением неравенства (12) будет промежуток $[x_1;\ x_2]$, т. е. $[\frac{9-21a}{5};\ -3a-3]$, поскольку именно на этом промежутке график y_1 будет находиться ниже графика y_2.

Ответ:
при $a<4$ решений нет;
при $a=4$ одно решение $x=-15$;
при $a>4$ решения $x\in\left[\frac{9-21a}{5};-3a-3\right]$.

§ 10. СЕЧЕНИЕ СЕМЕЙСТВОМ ПРЯМЫХ $y=ax$

Задача 20. При всех a определить число решений уравнения

$$|x+3|=ax. \qquad (13)$$

Решение. Построим графики $y_1 = |x + 3|$ и $y_2 = ax$. График функции y_1 представляет уголок с вершиной в точке $x = -3$. Раскрывая знак модуля у функции y_1, получаем

$$y_1 = \begin{cases} x+3 \text{ при } x+3 \geq 0, \text{ т.е. } x \geq -3 \text{ - правая ветвь уголка} \\ -x-3 \text{ при } x+3 \leq 0, \text{ т.е. } x \leq -3 \text{ - левая ветвь уголка} \end{cases}.$$

График $y_2 = ax$ при каждом конкретном значении a представляет собой прямую; при разных a разные прямые, но все они проходят через начало координат (рис. 33).

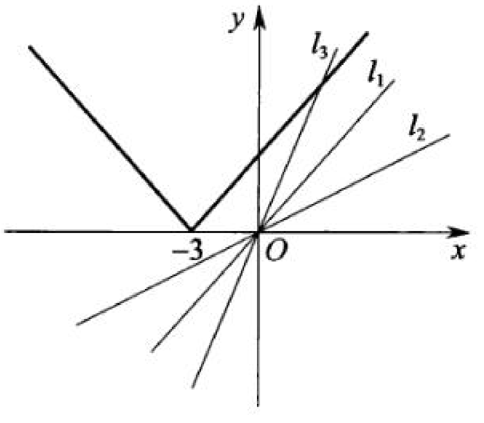


Рис. 33

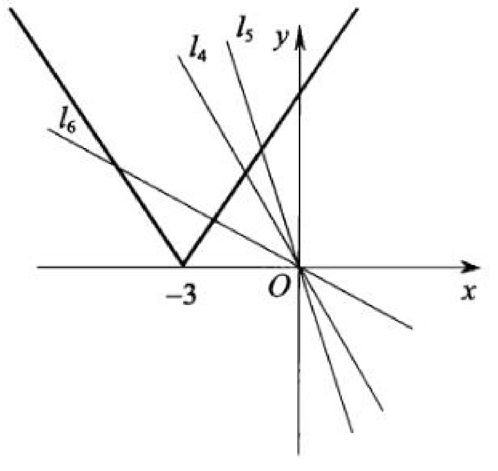


Рис. 34

Найдем число точек пересечения этих графиков в зависимости от значений a. Рассмотрим три случая: $a = 0$, $a > 0$ и $a < 0$.

1) Если $a = 0$, то $y_2 = 0$. Это прямая, совпадающая с осью Ox. Она имеет с уголком $y_1 = |x + 3|$ одну общую точку $x = -3$.

2) При любых $a > 0$ прямая $y_2 = ax$ проходит ниже вершины «уголка» (рис. 33), поэтому она не пересекается с левой ветвью уголка $y_1 = |x + 3|$. Найдем, при каких a она пересекается с правой ветвью этого уголка.

Правая ветвь имеет уравнение $y_1 = x + 3$. Угловой коэффициент этой прямой $k = 1$. Следовательно, при $a = 1$ прямая $y_2 = ax$ параллельна правой ветви уголка (рис. 33, прямая l_1).

Из этого следует, что при $0 < a < 1$ прямая $y_2 = ax$ будет расходиться с правой ветвью (рис. 33, прямая l_2). Поэтому при $0 < a \leq 1$ уравнение решений не имеет.

При $a > 1$ прямая $y_2 = ax$ будет пересекаться с правой ветвью $y_1 = x + 3$ (на рис. 34, прямая l_3). Следовательно, уравнение будет иметь одно решение.

Случай $a \ge 0$ полностью исследован.

3) $a < 0$. Очевидно, что при $a < 0$, любая прямая $y_2 = ax$ пересекается с правой ветвью уголка $y_1 = |x + 3|$ (рис. 34). Это означает, что при $a < 0$ одно решение всегда имеется. Найдем теперь, при каких a прямая $y_2 = ax$ пересекается с левой ветвью уголка. Левая ветвь имеет уравнение $y_1 = -x - 3$. Следовательно, при $a = -1$ прямая $y_2 = ax$ будет ей параллельна (рис. 34, прямая l_4), а при $a < -1$, прямая $y_2 = ax$ с ней расходится (прямая l_5 на рис. 34). Следовательно, при $a < -1$ и при $a = -1$ уравнение (13) будет иметь только одно решение.

А вот при $-1 < a < 0$ прямая $y_2 = ax$ будет пересекать и правую, и левую ветви уголка (рис. 34, прямая l_6) и, следовательно, уравнение (13) будет иметь два решения.

Ответ: при $0 < a \le 1$ решений нет;
при $a > 1$, $a \le -1$, $a = 0$ одно решение;
при $-1 < a < 0$ два решения.

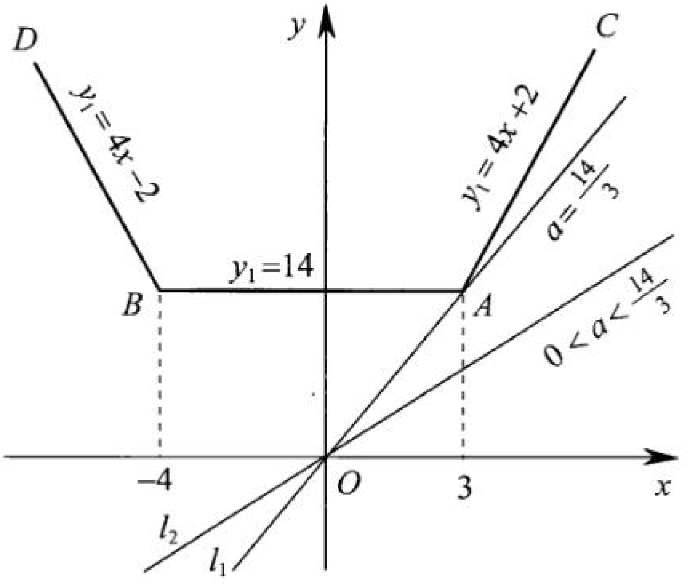


Рис. 35

Задача 21. При каких положительных значениях a уравнение

$$|2x + 8| + |2x - 6| = ax \tag{14}$$

имеет одно решение?

Решение. Нарисуем графики функций $y_1 = |2x + 8| + |2x - 6|$ и $y_2 = ax$. График $y_2 = ax$ при каждом a представляет собой прямую, проходящую через начало координат. Как строится график y_1, мы разбирали в задаче 11. Здесь только напомним

$$y_1 = \begin{cases} 4x+2 \text{ при } x \geq 3 \\ 14 \text{ при } -4 \leq x \leq 3 \\ -4x-2 \text{ при } x \leq -4 \end{cases}.$$

Итак, нам надо найти положительные значения a, при которых графики y_1 и y_2 не пересекаются.

В этом месте некоторые школьники рассуждают так: «Найдем a, при которых прямая $y_2 = ax$ проходит через точку A (3; 14) (рис. 35). Подставляя координаты точки A в $y_2 = ax$, получаем равенство $14 = a \cdot 3$. Откуда $a = \frac{14}{3}$. Следовательно, при $0 < a < \frac{14}{3}$ прямая $y_2 = ax$ пройдет ниже точки A (рис. 35) и решений не будет.

Ответ: $0 < a < \frac{14}{3}$.

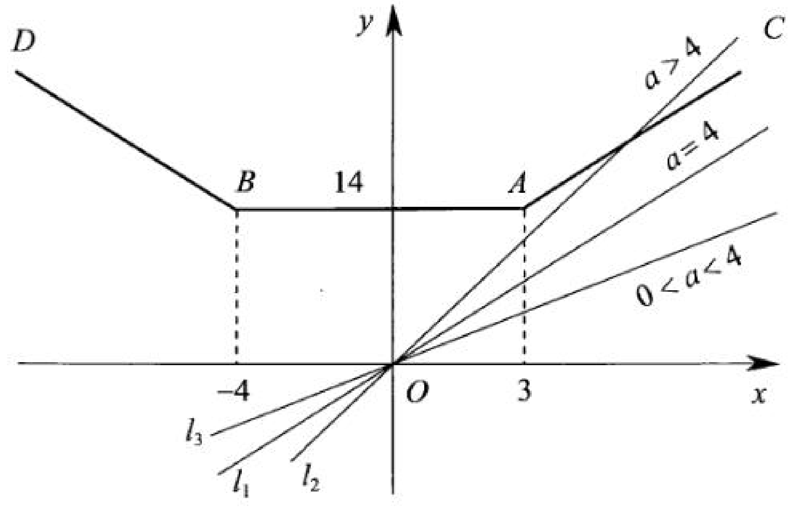


Рис. 36

Это рассуждение ошибочно. Дело в том, что до того, как прямая $y_2 = ax$ пройдет через точку A, она уже может пересечься с ветвью AC графика y_1 (рис. 36). Именно этот случай и имеет место в нашей задаче.

Действительно, ветвь AC имеет уравнение $y_1 = 4x + 2$. Поэтому прямая $y_2 = ax$ будет параллельна этой ветви при $a = 4$. Следовательно, при любом $a > 4$ прямая $y_2 = ax$ будет пересекаться с правой ветвью $y_1 = 4x + 2$. Из сказанного ясно, что при $a > 4$ уравнение (14) имеет одно решение, а не имеет оно решений при $0 < a \le 4$.

Ответ: $0 < a \le 4$.

Решение этой задачи показывает, что надо быть очень осторожными при визуальной оценке расположения графиков друг относительно друга. И все неочевидные моменты должны аналитически обосновываться, так же, как мы сделали это в предыдущей задаче . Вычислив, при каком a прямая $y_2 = ax$ проходит через точку A, и при каком она параллельна ветви $y_1 = 4x + 2$, мы пришли к выводу, что имеет место конфигурация как на рис. 36, а не как на рис. 35.

§ 11. КАСАНИЕ ПАРАБОЛЫ И ПРЯМОЙ

Прежде, чем переходить к следующей задаче, рассмотрим условия, при которых прямая $y_1 = kx + d$ касается параболы $y_2 = ax^2 + bx + c$. Случай касания прямой и параболы означает, что они имеют только одну общую точку (рис.37).

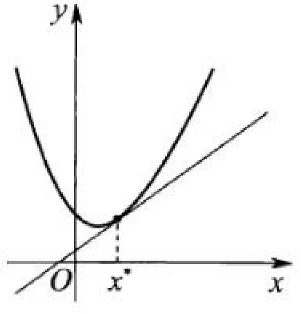


Рис. 37

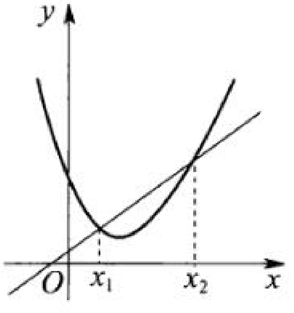


Рис. 38

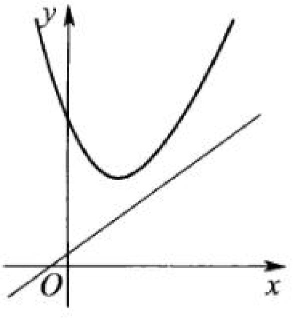


Рис. 39

На языке алгебры это означает, что равенство $y_1 = y_2$ выполняется только при одном значении x. Или другими словами, что уравнение

$$kx + d = ax^2 + bx + c \tag{15}$$

имеет ровно одно решение

Перенося все члены этого уравнения в одну сторону, приходим к квадратному уравнению

$$ax^2 + x(b - k) + c - d = 0\ . \tag{16}$$

А квадратное уравнение имеет одно решение только в том случае, когда его дискриминант равен 0. Это и есть необходимое и достаточное условие касания прямой $y_1 = kx + d$ и параболы $y_2 = ax^2 + bx + c$. Из сказанного сразу следует: если $D > 0$, то уравнение (16) имеет два решения x_1 и x_2. А это означает, что прямая y_1 пересекает параболу y_2 в двух точках (рис. 38).

И, наконец, если $D < 0$, то парабола и прямая не имеют общих точек (рис. 39).

Заметим также, что из произвольной точки A, находящейся вне параболы, к параболе можно провести две касательные (на рис. 40 это касательные l_1 и l_2, проведенные из точки A). Ясно, что l_1 и l_2 касаются параболы в разных точках.

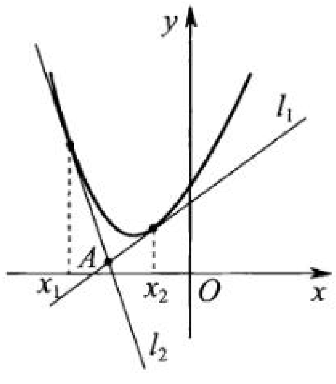


Рис. 40

Задача 22. При каких значениях a прямая $y = 3ax + 4a - 3$ касается параболы $y = x^2 + (a + 2)x + 9a - 2$; при каких a эта прямая пересекает параболу в двух точках; при каких a они не имеют общих точек?

Решение.

1. Прямая $y = 3ax + 4a - 3$ касается параболы $y = x^2 + (a + 2)x + 9a - 2$, если уравнение $x^2 + (a + 2)x + 9a - 2 = 3ax + 4a - 3$ имеет одно решение. Перенося все члены уравнения в одну сторону, приходим к квадратному уравнению

$$x^2 + x(2 - 2a) + 5a - 5 = 0\,. \tag{17}$$

Последнее уравнение имеет одно решение, если $D = 0$. Имеем $D = (2 - 2a)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (5a - 5) = 4a^2 - 28a + 24 = 0$. Откуда находим $a_1 = 1$, $a_2 = 6$.

2. Прямая $y = 3ax + 4a - 3$ будет пересекать параболу в двух точках, если уравнение (17) будет иметь два решения. Это будет при $D > 0$. Имеем $4a^2 - 28a + 24 > 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$.

3. Прямая и парабола не пересекаются, если уравнение (17) не имеет решений. Последнее будет при $D < 0$. Имеем, $D = 4a^2 - 28a + 24 < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a \in (1; 6)$.

Ответ:

при $a = 1$ и $a = 6$ прямая касается параболы;
при $a \in (-\infty;\ 1) \cup (6;\ +\infty)$ прямая пересекает параболу в двух точках;
при $a \in (1;\ 6)$ прямая и парабола не имеют общих точек.

Вернемся к уравнениям и неравенствам с параметрами.

Задача 23. При всех $a \geq 0$ определить число решений уравнения

$$|x^2 - 10x + 16| = ax. \tag{18}$$

Решение. Построим графики $y_1 = |x^2 - 10x + 16|$ и $y_2 = ax$ (рис. 41). Построение графика $y_1 = |x^2 - 10x + 16|$ было нами разобрано в задаче 14 . Напомним,

$$y_1 = |x^2 - 10x + 16| = \begin{cases} x^2 - 10x + 16 \text{ при } x \in (-\infty; 2] \cup [8; +\infty) \\ -x^2 + 10x - 16 \text{ при } x \in [2; 8] \end{cases}.$$

То есть график $y_1 = |x^2 - 10x + 16|$ состоит из двух парабол: параболы $y_1 = x^2 - 10x + 16$ на множестве $x \in (-\infty; 2] \cup [8; +\infty)$ и параболы $y_1 = -x^2 + 10x - 16$ на множестве $x \in [2; 8]$. График $y_2 = ax$ при всех a есть прямая, проходящая через начало координат.

Рассмотрим два случая: $a = 0$ и $a > 0$.

Случай I. $a = 0$. Тогда $y_2 = 0$ есть прямая, совпадающая с осью Ox. Она пересекает график y_1 в двух точках $x_1 = 2$ и $x_2 = 8$ (рис. 41). Следовательно, при $a = 0$ уравнение (18) имеет два решения.

Случай II. $a > 0$. Тогда при «небольших» a, прямая $y_2 = ax$ пересекает график y_1 в четырех точках (рис. 41, прямая l_1). Это будет до момента касания прямой $y_2 = ax$ с параболой $y_1 = -x^2 + 10x - 16$ (прямая l_2). Найдем, при каких a прямая $y_2 = ax$ касается параболы.

Как мы уже говорили, касание параболы и прямой равносильно тому, что уравнение

$$-x^2 + 10x - 16 = ax \Leftrightarrow x^2 + (a - 10)x + 16 = 0$$

имеет одно решение. Это будет, если $D = 0$. Имеем

$$D = (a-10)^2 - 64 = a^2 - 20a + 36 = 0 \Leftrightarrow a_1 = 2;\ a_2 = 18.$$

Итак, касание прямой $y_2 = ax$ и параболы будет при двух значениях a. Но нам подходит только одно значение $a = 2$. Дело в том, что мы рассматриваем не всю параболу $y_1 = -x^2 + 10x - 16$, а только ее часть на промежутке $[2; 8]$ и при $a = 2$, прямая $y_2 = ax$ будет касаться нашей параболы внутри рассматриваемого промежутка; при $a = 18$ касание будет вне этого промежутка. Покажем это.

1. $a = 2$. Уравнение (18) имеет вид $-x^2 + 10x - 16 = 2x$ при этом значении a.

Оно имеет единственное решение $x = 4$. Значение $x = 4$ и есть точка касания. Она принадлежит промежутку $[2;8]$. Сказанное выше проиллюстрировано на рис. 42.

2. $a = 18$. Тогда уравнение (18) имеет вид $-x^2 + 10x - 16 = 18x$.

Его единственное решение $x = -4$ и есть точка касания прямой $y_2 = 18x$ и параболы $y_1 = -x^2 + 10x - 16$. Но $x = -4$ находится вне промежутка $[2; 8]$, на котором рассматривается наша парабола y_1.

Итак, нам подходит только $a = 2$.

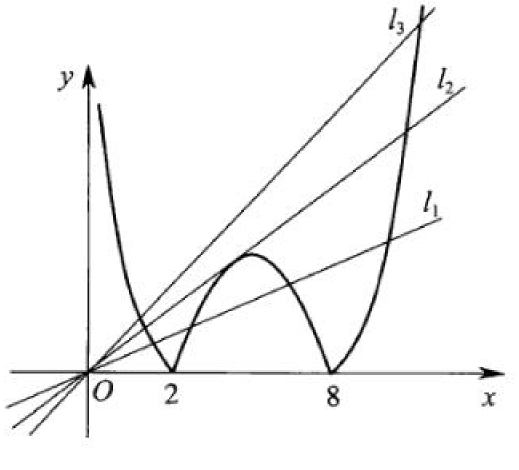


Рис. 41

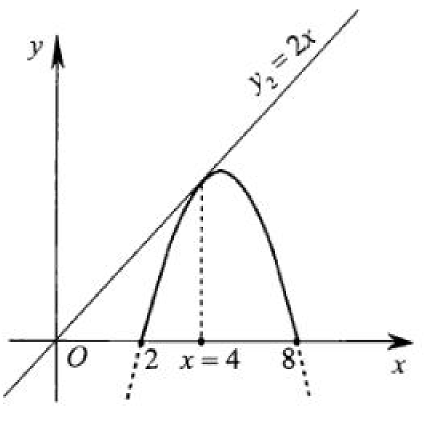


Рис. 42

Возвратимся к графикам на рис. 41. Из вышесказанного ясно, что при $0 < a < 2$ уравнение (18) имеет четыре решения (прямая l_1). При $a = 2$ – три решения (прямая l_2). При $a > 2$ – два решения (прямая l_3).

Ответ:
при $a = 0$ и $a > 2$ два решения;
при $a = 2$ три решения;
при $a \in (0;\ 2)$ четыре решения.

Продолжим исследование уравнения (18)

Задача 24. При всех $a \geq 0$ найти решения уравнения

$$\left|x^2 - 10x + 16\right| = ax.$$

Решение. Для того, чтобы найти сами решения, надо найти точки пересечения графиков y_1 и y_2. Приравнивая $y_1 = x^2 - 10x + 16$ и $y_2 = ax$, мы найдем две точки пересечения $x_1 = \dfrac{a + 10 - \sqrt{a^2 + 20a + 36}}{2}$ и $x_2 = \dfrac{a + 10 + \sqrt{a^2 + 20a + 36}}{2}$. Приравнивая $y_1 = -x^2 + 10x - 16$ и $y_2 = ax$, найдем еще две точки пересечения $x_3 = \dfrac{10 - a - \sqrt{a^2 - 20a + 36}}{2}$ и $x_4 = \dfrac{10 - a + \sqrt{a^2 - 20a + 36}}{2}$.

Учитывая результаты предыдущей задачи и графики на рис. 43–45, на которых раздельно нарисованы случаи, когда прямая y_2 пересекает график y_1 в четырех точках (рис. 43), когда прямая y_2 касается внутренней части графика y_1 (рис. 44), и когда она проходит выше точки касания (рис. 45), мы видим, что

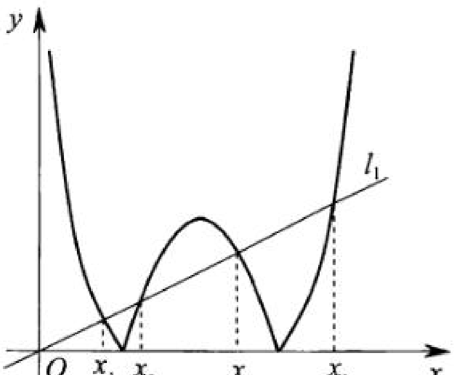


Рис. 43

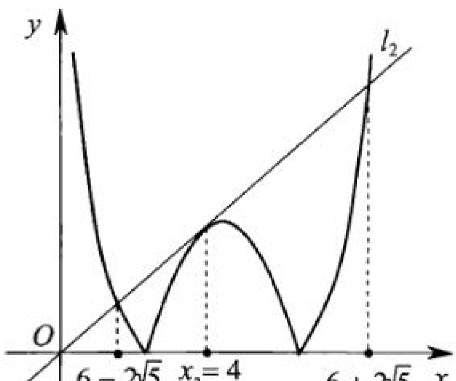


Рис. 44

1) при $0 < a < 2$ все четыре значения x_1, x_2, x_3 и x_4 будут решениями исходного уравнения (рис. 43);

2) подставляя $a = 2$ в выражения для x_1, x_2, x_3 и x_4, находим, что при $a = 2$ уравнение имеет три решения $x_1 = 6 - 2\sqrt{5}$, $x_2 = 6 + 2\sqrt{5}$, $x_3 = x_4 = 4$ (рис. 44);

3) при $a > 2$ решениями будут только два значения x_1 и x_2 (рис. 45).

И, наконец, при $a = 0$ решениями будут $x_1 = 2$, $x_2 = 8$. Эти результаты и будут ответом задачи 24.

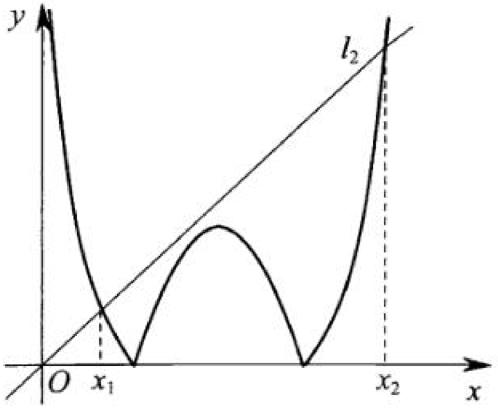


Рис. 45

Задача 25. При всех значениях $a \geq 0$ решить неравенство

$$\left|x^2 - 10x + 16\right| < ax.$$

Решение. Нам надо найти значения x, при которых график $y_2 = ax$ находится выше графика $y_1 = \left|x^2 - 10x + 16\right|$. Воспользовавшись найденными в предыдущей задаче точками пересечения графиков y_1 и y_2 и рис. 43–45, легко записать решения нашего неравенства.

1) При $a = 0$ неравенство решений не имеет.

2) При $0 < a < 2$, решениями будут $x \in (x_1; x_3) \cup (x_4; x_2)$ (рис. 43).

3) Поскольку при $a = 2$ решениями уравнения $\left|x^2 - 10x + 16\right| = ax$ будут $x_1 = 6 - 2\sqrt{5}$, $x_2 = 6 + 2\sqrt{5}$, $x_3 = 4$ (см. пункт 3 задачи 24), то легко видеть, что решением неравенства при $a = 2$ будут $x \in \left(6 - 2\sqrt{5}; 4\right) \cup \left(4; 6 + 2\sqrt{5}\right)$ (рис. 44). Мы выкололи точку $x = 4$, т. к. исходное неравенство строгое.

4) При $a > 2$ решениями будут $x \in (x_1; x_2)$ (рис. 45).

Здесь x_1, x_2, x_3 и x_4 – точки пересечения графиков $y_1 = |x^2 - 10x + 16|$ и $y_2 = ax$ (см. задачу 24).

Прежде, чем переходить к следующей задаче с параметрами, построим график функции $y = \sqrt{a^2 - x^2}$.

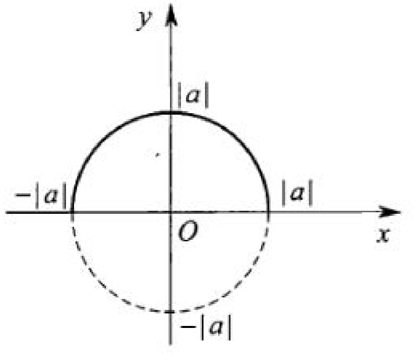


Рис. 46

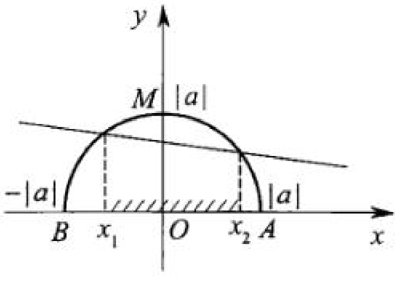


Рис. 47

Задача 26. Показать, что графиком функции $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ при $a \neq 0$ является полуокружность с центром в начале координат и радиусом $|a|$.

Решение. Рассмотрим равенство $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ как уравнение с двумя неизвестными x и y и перепишем его в виде

$$\sqrt{a^2 - x^2} = y. \tag{19}$$

Если $y < 0$, то очевидно, что уравнение (19) решений не имеет, т. к. $\sqrt{a^2 - x^2} \geq 0$ при всех допустимых a и x.

При $y \geq 0$ уравнение (19) равносильно системе [1]:

$$\begin{cases} y \geq 0 \\ a^2 - x^2 = y^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y \geq 0 \\ x^2 + y^2 = a^2 \end{cases}. \tag{20}$$

Как известно из школьного курса геометрии, окружность с центром в начале координат радиуса R $(R > 0)$ имеет уравнение $x^2 + y^2 = R^2$. Поэтому $x^2 + y^2 = a^2$ есть уравнение окружности с центром в $O(0; 0)$ и радиусом $R = \sqrt{a^2} = |a|$. И, наконец, среди точек этой окружности мы должны выбрать те, у которых $y \geq 0$. Это верхняя полуокружность (рис. 46). Она изображена более жирной линией.

[1] Переход от уравнения (19) к равносильной системе (20) есть стандартный для иррациональных уравнений переход. Подробнее об этом см. [3,10].

Задача 27. При каких значениях a неравенство

$$\sqrt{a^2-x^2} > 9 - \frac{2x}{3} - \frac{a}{2} \qquad (21)$$

имеет хотя бы одно отрицательное решение.

Решение.

1. $a = 0$. Тогда наше неравенство имеет вид $\sqrt{-x^2} > 9 - \frac{2x}{3}$, которое, очевидно, решений не имеет.

2. $a \neq 0$. Построим графики $y_1 = \sqrt{a^2-x^2}$ и $y_2 = 9 - \frac{2x}{3} - \frac{a}{2}$. График y_1 есть полуокружность с центром в начале координат и радиусом $|a|$ (см. задачу 26). График y_2 – прямая. Оба этих графика представлены на рис. 47.

Решением неравенства (21) будут все точки x, при которых график y_1 находится выше графика y_2, причем, согласно условию задачи, среди решений должно быть хотя бы одно отрицательное. Это будет в том и только в том случае, если прямая y_2 будет проходить ниже точки $M(0; |a|)$ (рис. 47). Последнее будет иметь место, если $y_2(0) = 9 - \frac{2\cdot 0}{3} - \frac{a}{2} < |a|$.

Итак, нам осталось решить неравенство $|a| + \frac{a}{2} - 9 > 0$.

Случай 1

$$\begin{cases} a \geq 0, \\ a + \frac{a}{2} - 9 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow a > 6.$$

Случай 2

$$\begin{cases} a \leq 0, \\ -a + \frac{a}{2} - 9 > 0, \end{cases} \Leftrightarrow a < -18.$$

Ответ: $a \in (-\infty; -18) \cup (6; +\infty)$.

Замечание. В случае, если прямая y_2 проходит ниже точек A и B, решением неравенства (21) будет промежуток BA, который, конечно же, содержит отрицательные значения.

Задача 28. Построить график функции $y = 4\cdot\left|4\cdot|x| - a^2\right|$. (Этот график нам понадобится в следующей задаче.)

Решение. Рассмотрим сначала случай $a = 0$. Тогда наша функция имеет вид $y = 4\cdot\left|4\cdot|x|\right| = 16|x|$, т. к. $\left||x|\right| = |x|$. Раскрывая знак модуля, получаем:

$$y = \begin{cases} 16x & \text{при } x \geq 0 \\ -16x & \text{при } x \leq 0 \end{cases}.$$

Нарисовав теперь графики $y = 16x$ при $x \geq 0$ и $y = -16x$ при $x \leq 0$, получим искомый график (рис. 48).

Построим теперь график исходной функции при $a \neq 0$. Заметим, что исходная функция – четная. Действительно,

$$y(-x) = 4 \cdot \left|4 \cdot |-x| - a^2\right| = 4 \cdot \left|4 \cdot |x| - a^2\right| = y(x).$$

Поэтому ее график симметричен относительно оси Oy. Следовательно, нам достаточно построить график на множестве $x \geq 0$, а затем зеркально отобразить его относительно оси Oy.

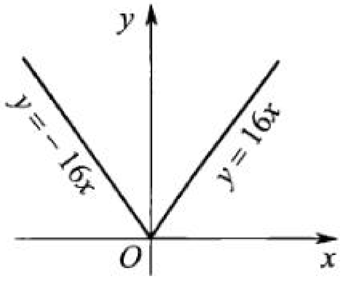


Рис. 48

Итак, $x \geq 0$. Тогда $|x| = x$ и $y = 4 \cdot \left|4x - a^2\right|$.

Случай 1. $4x - a^2 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \dfrac{a^2}{4}$. Тогда $\left|4x - a^2\right| = 4x - a^2$ и, следовательно, $y = 4(4x - a^2) = 16x - 4a^2$.

Случай 2. $4x - a^2 \leq 0 \Leftrightarrow x \leq \dfrac{a^2}{4}$. Тогда, $\left|4x - a^2\right| = a^2 - 4x$ и, следовательно, $y = 4(4x - a^2) = 4a^2 - 16x$.

Таким образом, при $x \geq 0$:

$$y = \begin{cases} 16x - 4a^2 & \text{при } x \geq \dfrac{a^2}{4} \\ 4a^2 - 16x & \text{при } 0 \leq x \leq \dfrac{a^2}{4} \end{cases}.$$

График функции $y = 16x - 4a^2$ есть прямая с угловым коэффициентом $k = 16$. Для ее построения возьмем две точки:

1. $x = 0$. Тогда $y = -4a^2$. 2. $y = 0$. Тогда $16x - 4a^2 = 0$ и $x = \frac{a^2}{4}$.

Проведя через эти две точки прямую и взяв часть ее, начинающуюся от точки $x = \frac{a^2}{4}$, получим правую ветвь искомого графика. На рис. 49 это ветвь AB.

На промежутке $[0; \frac{a^2}{4}]$ исходная функция совпадает с прямой $y = 4a^2 - 16x$. Для ее построения возьмем две точки:

1. $x = 0 \Rightarrow y = 4a^2$. 2. $y = 0$, $16x - 4a^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{a^2}{4}$.

Соединив эти две точки, получим еще одну часть искомого графика. На рис. 49 это отрезок CA.

Отобразив теперь ломаную CAB (рис. 49) симметрично относительно

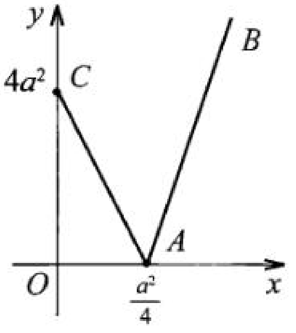


Рис. 49

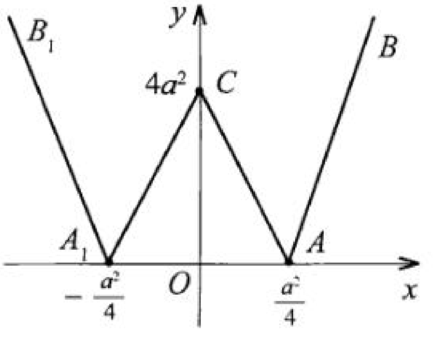


Рис. 50

оси Oy, получим искомый график (рис. 50). Глядя на рис. 50-52, мы видим, что графики функции $y = 4 \cdot \left|4 \cdot |x| - a^2\right|$ при $a = 0$ и $a \neq 0$ принципиально различаются. При $a \neq 0$ – это четырехзвенная ломаная с двумя минимумами и одним максимумом, а при $a = 0$ – это двухзвенная ломаная с одним минимумом (это связано с тем, что при $a = 0$ точки A и A_1 совмещаются с началом координат). Поэтому при графическом решении задач с параметрами, включающими функции, которые имеют принципиально разную форму графика при разных значениях a, надо все эти случаи рассматривать раздельно.

Задача 29. При каких a уравнение

$$4\left|4|x|-a^2\right| = x-a \tag{22}$$

имеет три решения. Найти эти решения. При каких a уравнение имеет четыре решения?

Решение. Нарисуем графики функций $y_1 = 4\left|4|x|-a^2\right|$ и $y_2 = x-a$.

При $a=0$ график y_1 имеет вид как на рис. 50. Поэтому прямая $y_2 = x-a$ не может пересечься с ним более чем в двух точках. Следовательно, $a=0$ не удовлетворяет условию задачи.

Рассмотрим теперь $a \neq 0$.

1. Найдем ответ на первый вопрос задачи: при каких a прямая $y_2 = x-a$ пересекает график y_1 в трех точках. Это будет в двух случаях: когда прямая y_2 проходит через точку C (на рис. 51 прямая l_1) и когда она проходит через точку B (прямая l_2). Рассмотрим эти два случая

а) Прямая y_2 проходит через точку C, если $y_2(-\frac{a^2}{4}) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow -\frac{a^2}{4} - a = 0 \Leftrightarrow a=-4$ или $a=0$. Нам подходит только одно значение $a=-4$, т. к. мы рассматриваем случай $a \neq 0$.

Итак, уравнение имеет три решения при $a=-4$. Чтобы найти сами решения, проще всего подставить значение $a=-4$ в исходное уравнение и решить его. Имеем

$$4\left|4|x|-16\right| = x+4 \ .$$

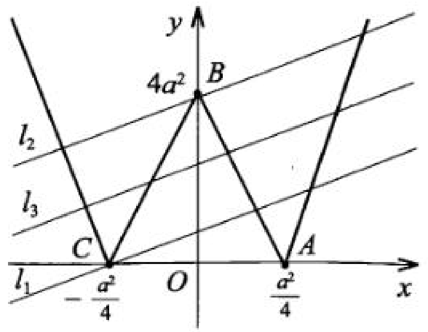


Рис. 51

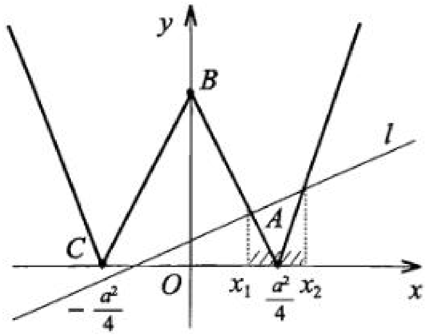


Рис. 52

Раскрыв модули, находим три его решения: $x_1 = -4$, $x_2 = \frac{68}{15}$, $x_3 = \frac{60}{17}$.

б) Прямая y_2 проходит через точку B (прямая l_2 на рис. 51). Это будет, если $y_2(0) = 4a^2$. Имеем, $-a = 4a^2 \Leftrightarrow 4a^2 + a = 0$, откуда находим

$a_1 = 0$, $a_2 = -\frac{1}{4}$. Условию задачи удовлетворяет только $a = -\frac{1}{4}$. Для определения самих решений подставим $a = -\frac{1}{4}$ в исходное уравнение. Тогда

$$\left|4|x| - \frac{1}{16}\right| = x + \frac{1}{4} .$$

Раскрывая модули, найдем три его решения: $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{1}{30}$, $x_3 = -\frac{1}{34}$.

2. Уравнение (22) имеет четыре решения, если прямая $y_2 = x - a$ проходит выше точки C, но ниже точки B (прямая l_3 на рис. 51). Последнее имеет место при

$$\begin{cases} y_2(-\frac{a^2}{4}) > 0 \\ y_2(0) < 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\frac{a^2}{4} - a > 0 \\ 0 - a < 4a^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 + 4a < 0 \\ 4a^2 + a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-4; -\frac{1}{4}).$$

Ответ:
$$\left| \begin{array}{l} \text{при } a = -4 \quad \text{три решения } x_1 = -4, x_2 = \frac{68}{15}, x_3 = \frac{60}{17}; \\ \text{при } a = -\frac{1}{4} \quad \text{три решения } x_1 = 0, x_2 = \frac{1}{30}, x_3 = -\frac{1}{34}; \\ \text{при } a \in (-4; -\frac{1}{4}) \quad \text{четыре решения.} \end{array} \right.$$

Задача 30. Найти наибольшее целое отрицательное значение параметра a, при котором множество решений неравенства

$$4\left|4|x| - a^2\right| \le x - a \tag{23}$$

не содержит отрицательных значений.

Решение. Найдем множество всех a, при которых исходное неравенство не содержит отрицательных значений, а затем уже из них выберем наибольшее целое отрицательное значение.

Нарисуем графики функций $y_1 = 4\left|4|x| - a^2\right|$ и $y_2 = x - a$ (рис. 52). Множеством решений неравенства (23) будут все x, при которых график y_1 находится ниже графика y_2. Это множество не будет содержать отрицательных значений в том и только в том случае, когда прямая $y_2 = x - a$ будет проходить выше точки A (или через саму точку A), но ниже точки C (на рис. 52 это прямая l). (Множеством решений в этом случае будет промежуток $[x_1; x_2]$, который не содержит отрицательных значений.) Данный случай будет иметь место, если:

$$\begin{cases} y_2(\frac{a^2}{4}) \ge 0 \\ y_2(-\frac{a^2}{4}) < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{a^2}{4} - a \ge 0 \\ -\frac{a^2}{4} - a < 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a \ge 0 \\ a^2 + 4a > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-\infty; -4) \cup [4; +\infty).$$

Среди этих значений наибольшим целым отрицательным будет $a = -5$.

Ответ: $a = -5$.

Задача 31. При каких значениях a все решения уравнения

$$2|x - a| + a - 4 + x = 0 \tag{24}$$

удовлетворяют неравенству $0 \le x \le 4$?

Эту задачу мы решим двумя способами – с использованием графиков и чисто аналитически.

Решение. I-й способ, графический. Перепишем уравнение в виде

$$2|x - a| = -x + 4 - a.$$

Построим графики $y_1 = 2|x - a|$ и $y_2 = -x + 4 - a$. График y_1 представляет собой «уголок» с вершиной в точке $(a; 0)$ (рис. 53). Правая ветвь этого уголка имеет уравнение $y_1 = 2x - 2a$, левая $y_1 = 2a - 2x$. Угловой коэффициент правой ветви $k = 2$, левой – $k = -2$.

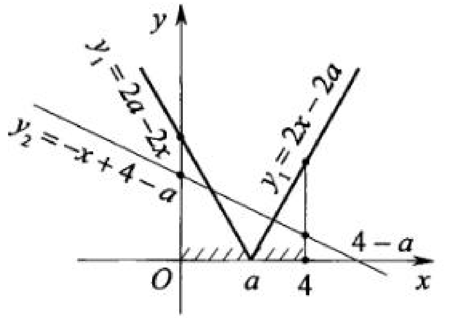


Рис. 53

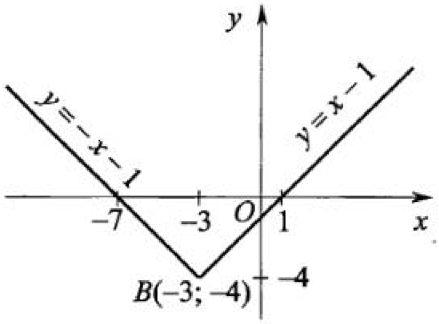


Рис. 54

График $y_2 = -x + 4 - a$ есть прямая с угловым коэффициентом $k = -1$.

1. Если прямая y_2 будет проходить ниже вершины уголка y_1, то уравнение (24) не будет иметь корней. Чтобы оно имело корни, прямая y_2 должна проходить над вершиной уголка (рис. 53). Это будет, если $y_2(a) \ge 0 \Leftrightarrow -a + 4 - a \ge 0 \Leftrightarrow 4 - 2a \ge 0$.

2. По условию задачи оба корня уравнения должны быть неотрицательны. Для этого достаточно потребовать, чтобы меньший корень был неотри-

цательный. Поскольку меньший корень получается в результате пересечения левой ветви уголка y_1 с прямой y_2, то он будет неотрицателен, если в точке $x = 0$ (рис. 53) выполняется неравенство

$$y_1(0) \geq y_2(0) \Leftrightarrow 2a - 2 \cdot 0 \geq 4 - a \Leftrightarrow 2a \geq 4 - a.$$

3. Чтобы оба корня были ≤ 4, достаточно потребовать, чтобы больший корень уравнения был меньше или равен 4. Больший корень получается в результате пересечения прямой y_2 с правой ветвью уголка y_1. Этот корень будет ≤ 4, если в точке $x = 4$ выполняется неравенство (рис. 53) $y_1(4) \geq y_2(4) = 2 \cdot 4 - 2a \geq -4 + 4 - a \Leftrightarrow 8 - 2a \geq - a$.

Собирая неравенства, полученные в пунктах 1–3, получаем систему

$$\begin{cases} y_2(a) \geq 0 \\ y_1(0) \geq y_2(0) \\ y_1(4) \geq y_2(4) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4 - 2a \geq 0 \\ 2a \geq 4 - a \\ 8 - 2a \geq -a \end{cases} \Leftrightarrow a \in [\frac{4}{3}; 2].$$

Ответ: $a \in [\frac{4}{3}; 2]$.

II-й способ, аналитический. Найдем сначала, при каких a уравнение вообще имеет решения. Раскроем знак модуля.

Случай 1. $x - a \geq 0$. Тогда уравнение (24) имеет вид:

$$2x - 2a + a - 4 + x = 0 \Leftrightarrow 3x - a - 4 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{a + 4}{3}.$$

Чтобы это число было корнем, оно должно удовлетворять условию $x - a \geq 0$. Имеем

$$\frac{a+4}{3} - a \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4-2a}{3} \geq 0 \Leftrightarrow a \leq 2.$$

Итак, при $a \leq 2$ уравнение (24) уже точно имеет один корень.

Случай 2. $x - a \leq 0$. Тогда уравнение (24) имеет вид

$$2a - 2x + a - 4 + x = 0 \Leftrightarrow -x + 3a - 4 = 0 \Leftrightarrow x_2 = 3a - 4.$$

Чтобы это число было корнем уравнения (24), оно должно удовлетворять неравенству $x - a \leq 0$. Имеем, $3a - 4 - a \leq 0 \Leftrightarrow a \leq 2$.

Таким образом, при $a \leq 2$ уравнение (24) имеет два корня $x_1 = \frac{a+4}{3}$ и $x_2 = 3a - 4$. При $a > 2$ оно вообще не имеет корней. По условию задачи нам надо найти такие a, при которых оба корня будут принадлежать промежутку $[0; 4]$. С учетом $a \leq 2$ имеем систему

$$\begin{cases} 0 \le x_1 = \dfrac{a+4}{3} \le 4 \\ 0 \le x_2 = 3a-4 \le 4 \\ a \le 2 \end{cases}.$$

Решая ее, получаем $a \in [\frac{4}{3}; 2]$.

Как видим, в данной задаче аналитический способ оказался проще, чем графический.

Задача 32. Для каждого значения a решить уравнение

$$|x+3| - a|x-1| = 4.$$

При каких a это уравнение имеет два решения?

Решение. I-й способ. Перепишем уравнение в виде

$$|x+3| - 4 = a|x-1|. \qquad (25)$$

Построим графики $y_1 = |x+3| - 4$ и $y_2 = a|x-1|$.

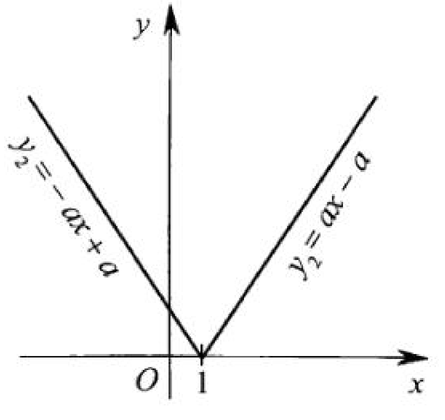


Рис. 55 $a|x-1|$, $a > 0$

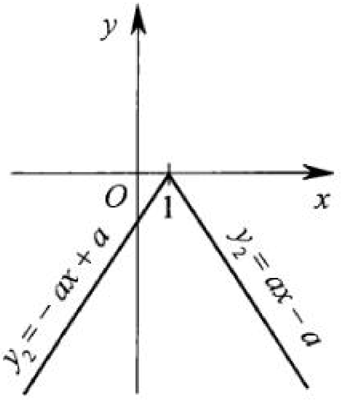


Рис. 56 $a|x-1|$, $a < 0$

Раскрыв знак модуля у функции $y_1 = |x+3| - 4$, получим

$$y_1 = \begin{cases} x-1 \text{ при } x \ge -3 \\ -x-7 \text{ при } x \le -3 \end{cases}.$$

Теперь, построив прямую $y_1 = x - 1$ при $x \ge -3$ и $y_1 = -x - 7$ при $x \le -3$, получим искомый график.

График функции y_1 (рис. 54) представляет собой уголок. Правая ветвь его имеет уравнение $y_1 = x - 1$ с угловым коэффициентом $k = 1$, левая ветвь – уравнение $y_1 = -x - 7$ с угловым коэффициентом $k = -1$ [1].

Приравняв $y_1 = 0 \Leftrightarrow |x + 3| - 4 = 0$, находим $x_1 = 1$; $x_2 = -7$ – точки пересечения графика y_1 с осью Ox.

График $y_2 = a|x - 1|$ при $a = 0$ представляет собой прямую, совпадающую с осью Ox, при $a > 0$ он представляет собой уголок с вершиной в точке $A\ (1;\ 0)$, ветви которого направлены вверх (рис. 55).

При $a < 0$ это будет тоже уголок с вершиной в той же точке $A\ (1;\ 0)$, но его ветви направлены вниз (рис. 56).

Заметим также, что поскольку координаты вершины $A\ (1;\ 0)$ уголка y_2 удовлетворяют уравнению $y_1 = x - 1$, то она независимо от значений параметра a всегда лежит на правой ветви уголка y_1 (рис. 59–64).

Перейдем теперь к исследованию уравнения (25). Рассмотрим три случая: $a = 0$, $a > 0$ и $a < 0$.

Случай 1. $a = 0$. Тогда уравнение (25) имеет вид

$$|x + 3| - 4 = 0\ .$$

График $y_1 = |x + 3| - 4$ пересекается с прямой $y_2 = 0$ в двух точках: $x_1 = 1$ и $x_2 = -7$ (рис. 54). Следовательно, при $a = 0$ уравнение имеет два корня.

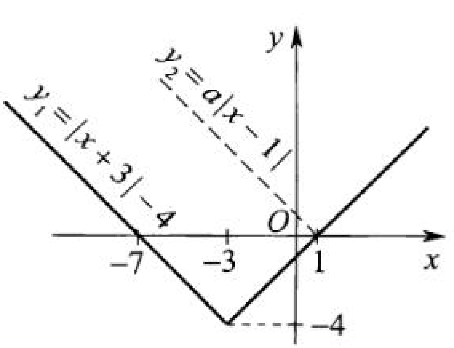


Рис. 57 $a = 1$

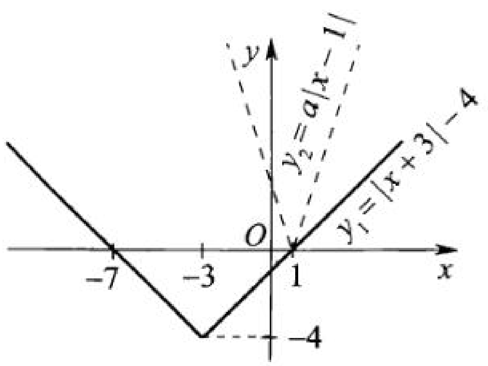


Рис. 58 $a > 1$

Случай 2. $a > 0$. Нарисуем графики y_1 и y_2 (рис. 57–59).

1. Правая ветвь уголка $y_2 = a|x - 1|$ имеет уравнение $y_2 = a(x - 1) = ax - a$. Она будет параллельна правой ветви уголка y_1, имеющей уравнение $y_1 = x - 1$ при $a = 1$. Более того, поскольку. вершина уголка y_2 – точка $(1;\ 0)$ – лежит на правой ветви уголка $y_1 = x - 1$, то начиная от этой

[1] Те, кто знает элементарные приемы построения графиков, сразу увидят, что график y_1 получается из графика $y = |x|$ путем сдвига на 3 единицы влево и на 4 единицы вниз.

точки, ветви будут совпадать (рис. 57). Следовательно, при $a = 1$ решениями уравнения (41) будут все $x \in [1; +\infty)$.

2. При $a > 1$ единственной общей точкой графиков y_1 и y_2 будет $x = 1$ (рис. 58). Следовательно, $x = 1$ будет единственным решением при $a > 1$.

3. $0 < a < 1$ (рис. 59). При этих значениях a, кроме корня $x = 1$, будет еще один корень, поскольку имеет место пересечение левой ветви графика y_1 и левой ветви графика y_2 (рис. 59).

Найдем абсциссу точки пересечения. Имеем $a - ax = -x - 7$.

Откуда $x_2 = \dfrac{a+7}{a-1}$. Значение $x_2 = \dfrac{a+7}{a-1}$ будет вторым корнем при $0 < a < 1$.

<u>*Случай* 3</u>. $a < 0$. На рис. 60–62 представлены графики $y_2 = a|x - 1|$ и $y_1 = |x + 3| - 4$ при $a < 0$.

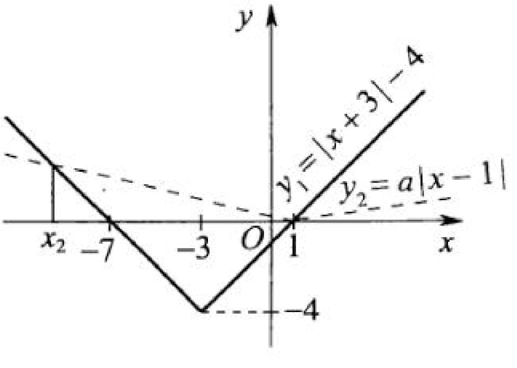


Рис. 59 $0 < a < 1$

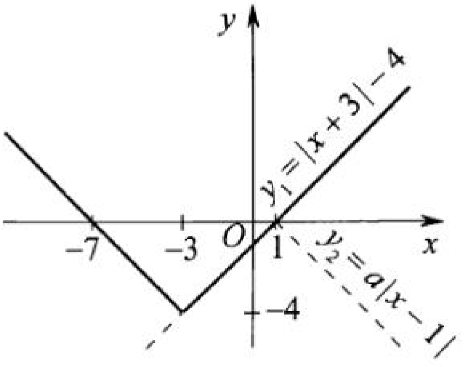


Рис. 60 $a = -1$

1. Рассмотрим сначала $a = -1$. При $a = -1$ функция y_2 принимает вид $y_2 = -|x - 1|$, или, раскрывая знак модуля

$$y_2 = \begin{cases} 1 - x \text{ при } x \geq 1 \text{ - правая ветвь} \\ x - 1 \text{ при } x \leq 1 \text{ - левая ветвь} \end{cases}.$$

Левая ветвь этого уголка совпадает с правой ветвью уголка y_1, на промежутке $[-3; 1]$ (рис. 60). Следовательно, при $a = -1$ решениями будут $x \in [-3; 1]$.

2. Если $a < -1$, то графики y_1 и y_2 имеют только одну общую точку $x = 1$ (рис. 61). Это значение и будет единственным решением уравнения при $a < -1$.

3. $-1 < a < 0$. В этом случае, кроме $x = 1$, будет еще один корень, поскольку левая ветвь графика y_2 пересекается с левой ветвью графика y_1 (рис. 62).

Находится эта точка так же $-x-7=a-ax \Rightarrow x_2=\dfrac{a+7}{a-1}$.

Таким образом, при $-1<a<0$ уравнение (25) имеет два корня: $x_1=1$ и $x_2=\dfrac{a+7}{a-1}$. Объединяя полученные результаты, запишем

Ответ:
$$\left|\begin{array}{l} \text{при } a>1 \text{ решение } x=1; \\ \text{при } a=1 \text{ решениями являются } x\in[1;+\infty); \\ \text{при } -1<a<1 \text{ решения } x_1=1,\ x_2=\dfrac{a+7}{a-1}; \\ \text{при } a=-1 \text{ решениями являются } x\in[-3;1]; \\ \text{при } a<-1 \text{ решение } x=1. \end{array}\right.$$

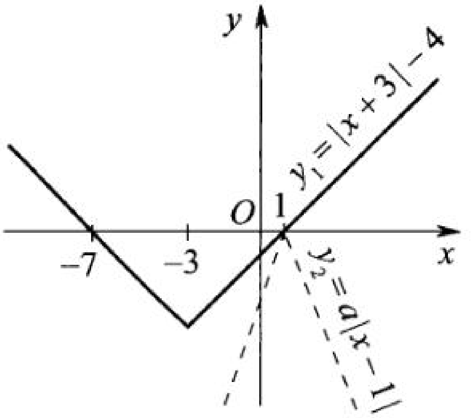


Рис. 61

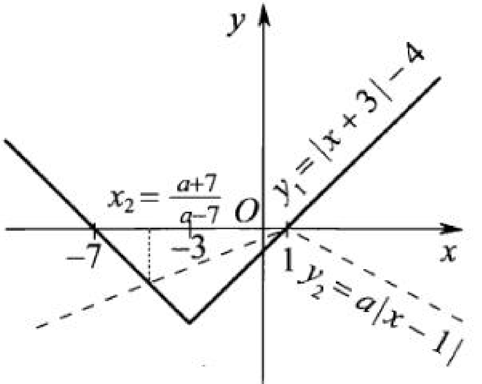


Рис. 62

Уравнение имеет два корня при $a\in(-1;\,1)$.

II-й способ. Заметим, что $x=1$ является корнем нашего уравнения

$$|x+3|-a|x-1|=4$$

при любом значении параметра a. (Убедитесь в этом самостоятельно!)

Будем искать другие корни. При $x\neq 1$ наше уравнение равносильно уравнению

$$\frac{|x+3|-4}{|x-1|}=a. \qquad (26)$$

Нарисуем графики $y_1=\dfrac{|x+3|-4}{|x-1|}$ и $y_2=a$. Рассмотрим три случая.

1. $x>1$. Тогда $y_1=\dfrac{x+3-4}{x-1}=\dfrac{x-1}{x-1}=1$.

2. $-3\le x<1$. Тогда $y_1=\dfrac{x+3-4}{1-x}=\dfrac{x-1}{1-x}=-1$.

3. $x \le -3$. Тогда $y_1 = \dfrac{-x-3-4}{1-x} = \dfrac{-x-7}{1-x} = \dfrac{x+7}{x-1}$.

Итак, имеем

$$y_1 = \begin{cases} 1 \text{ при } x > 1 \\ -1 \text{ при } -3 \le x < 1 \\ \dfrac{x+7}{x-1} \text{ при } x \le -3 \end{cases}.$$

График y_1 изображен на рис. 63

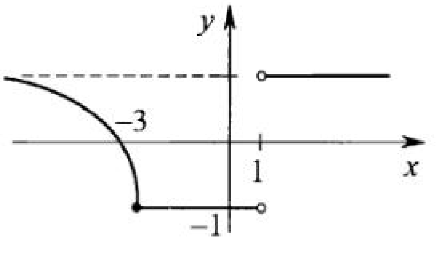


Рис. 63

(Как строятся графики дробно-линейных функций $y = \dfrac{ax+b}{cx+d}$, подробно разобрано в пособиях [3; 8; 10]). Поэтому мы здесь не будем останавливаться на построении графика $y = \dfrac{x+7}{x-1}$. Заметим только, что нам нужна часть этого графика, которая находится левее точки $x = -3$. На рис. 63 это кривая слева от точки $x = -3$, которая приближается к прямой $y = 1$ (называемой асимптотой).

При всех a график $y_2 = a$ представляет собой прямые, параллельные оси Ox. (Чтобы не загромождать чертеж, на рис. 63 они не изображены).

Из графиков на рис. 63 ясно следующее.

1. При $a > 1$ графики y_1 и y_2 не пересекаются и, следовательно, уравнение (26) не имеет решений.

2. При $a = 1$ уравнение имеет решениями $x \in (1; +\infty)$.

3. При $a \in (-1; 1)$ уравнение имеет одно решение. Это точка пересечения графиков $y_1 = \dfrac{x+7}{x-1}$ и $y_2 = a$. Имеем

$$\frac{x+7}{x-1} = a \Leftrightarrow x+7 = ax-a \Leftrightarrow x = \frac{a+7}{a-1} \text{ – решение.}$$

4. При $a=-1$ решениями будут $x \in [-3;\ 1)$.

5. При $a<-1$ решений нет.

Теперь, вспомнив, что $x = 1$ является корнем при любом a, добавим этот корень во все случаи. Получим окончательный

Ответ:
$$\left|\begin{array}{l} \text{при } a>1 \text{ решение } x=1; \\ \text{при } a=1 \text{ решение } x\in[1;+\infty); \\ \text{при } -1<a<1 \text{ решения } x_1=1,\ x_2=\frac{a+7}{a-1}; \\ \text{при } a=-1 \text{ решение } x\in[-3;1]; \\ \text{при } a<-1 \text{ решение } x=1. \end{array}\right.$$

Заключительные замечания. В этой главе мы рассмотрели метод сечений решения уравнений и неравенств с параметрами. Суть метода проста. Решение уравнения $f(x)=g(x)$ сводится к построению графиков $y_1=f(x)$ и $y_2=g(x)$, где одна из этих функций (или обе) зависят от параметра. Число точек пересечения этих графиков (при различных значениях параметра оно разное) определяет число решений этого уравнения, а абсциссы точек пересечения являются его корнями. При решении неравенств $f(x)<g(x)$ мы, исходя из тех же графиков, ищем точки, в которых график $g(x)$ находится выше графика $f(x)$.

Во многих задачах такое графическое представление уравнений и неравенств позволяет резко сократить перебор различных случаев, который имеет место при аналитическом решении этих задач.

Для того, чтобы хорошо овладеть методом сечений, надо научиться свободно строить графики функций как без параметра, так и зависящих от параметра.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

При всех a определить число решений уравнений:

1. $|3x-6|+3x=a$;
2. $|x^2+6x+5|=2a-12$;
3. $|x^2-6|x|-16|=-10a$;
4. $x^3-6x^2+9x-a-1=0$;
5. $6+2x^2-x^4-2a=0$;
6. $|2x-2|-|x-3|-x+4=ax$;
7. $|x^2-6x+5|=ax-1$.

При всех a решить уравнения:

8. $|3-x| = a$;

9. $(x+1)\,|x-1| - a = 8$;

10. $|3x+3| = ax+4$;

11. $|x+4|+2 = a|x+1|$;

12. $|x^2-6x+5| = 2ax$;

13. $|x+a|-2+x^2 = 0$.

При всех a решить неравенства:

14. $|3-x| > a$;

15. $(x+1)\,|x-1| - a \le 8$;

16. $|x^2-6x+5| \le 2ax$;

17. $|1-|x|| < a-x$.

18. При каких значениях параметра a корни уравнения $|2x-2| = -a^2+2a+3$ имеют одинаковые знаки.

19. Найти все значения параметра a, при которых уравнение $|2x-a|+1 = |x+3|$ имеет единственное решение.

20. При каких действительных значениях параметра a уравнение $(a-2{,}5)x+1 = 4|x-3|$ имеет ровно два различных корня?

21. Решить уравнение $|3x+3| = ax+4$ и определить значения a, при которых оно имеет единственное решение.

22. При каких значениях параметра k уравнение $||x|-3| = k(x-9)$ имеет одно, два, три, четыре решения?

23. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $3-|x-a| > x^2$ имеет хотя бы одно отрицательное решение.

24. При каких значениях a уравнение $2|x+3| - 3|x+4| + 3|x+5| = ax$ имеет два различных решения?

25. При каких значениях параметра a уравнение $|x^2-6x+8| + |x^2-6x+5| = a$ имеет более трех корней?

26. При каких a уравнение $ax - |x| - |x+2| = \frac{a}{2}$ имеет не менее двух решений?

27. Найти все a, при которых уравнение $ax^2+|x| = |x+1|$ не имеет решений.

28. Найти все a, при которых уравнение $x-\dfrac{a}{3}=9\,|\,9\,|x|-a^2\,|$ имеет три различных корня. Найти эти корни.

29. При каких a уравнение $|2x+8|+|2x-6|=ax$ имеет два решения?

30. Найти все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения $4|x-3a|+6a-24+x=0$ принадлежат отрезку $[6;\,12]$.

31. Найти все значения параметра a, при каждом из которых все решения уравнения $2|2x-a|+a+2x-8=0$ принадлежат отрезку $[1;\,4]$.

32. При каких значениях параметра a уравнение $|2x-a|=(a-2)x-\frac{3}{4}$ не имеет решений?

33. При всех $a<0$ решить уравнение $|x^2-10x+16|=ax$.

34. Воспользовавшись результатами задачи 33, при всех $a<0$ решить неравенство $|x^2-10x+16|\geq ax$.

БОЛЕЕ ТРУДНЫЕ ЗАДАЧИ

35. При всех a решить уравнение $a|x+3|+2|x+4|=2$ и определить, при каких a оно имеет ровно два решения.

36. При всех значениях a решить уравнение $|x-3|=a(x-1)^2+2$.

37. Найти все значения a, при которых функция $f(x)=|x-a+1|+|x+3a|$ является четной.

38. Найти все значения a, при каждом из которых корни уравнения $\sqrt{x-6\sqrt{x-9}}+|\sqrt{x-9}-5|=a$ существуют и принадлежат отрезку $[10;\,58]$.

39. При каких a неравенство $x^2-|x-a|-|x-1|+3\geq 0$ выполняется при всех x?

40. Найти наименьшее значение выражения $a^2+(b+1)^2$ на множестве таких чисел a и b, для которых уравнение $||x+2|-2|+ax+2a+b=0$ имеет ровно три различных корня. Указать, при каких a и b достигается это наименьшее значение.

41. Найти все значения k, при каждом из которых хотя бы для одного числа b уравнение $|x^2-1|+kx=|x^2-8x+15|+b$ имеет:
а) более 5 корней; б) ровно 5 корней.

Глава 7

СИСТЕМЫ ЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 1. ВВОДНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Рассмотрим сначала одно линейное уравнение с двумя неизвестными.

Задача 1. Найти все решения уравнения

$$3x + 5y = 18\ . \tag{1}$$

Подставляя любое значение $x \in R$ в это уравнение, мы сразу найдем соответствующее ему значение y. Полученная пара $(x; y)$ и будет решением этого уравнения. Например, подставляя $x = 1$, находим $y = 3$. Подставляя $x = 2$, находим $y = \frac{12}{5}$ и т. д. Ясно, что решений будет бесконечное множество. Как их все записать?

Решение. Из уравнения (1) находим $y = \frac{18-3x}{5}$. Тогда множество пар $\begin{cases} x \in R \\ y = \dfrac{18-3x}{5} \end{cases}$ и будет решением этого уравнения.

Ответ: $\begin{cases} x \in R \\ y = \dfrac{18-3x}{5} \end{cases}$.

Решения уравнения (1) имеют наглядную геометрическую интерпретацию. Если нарисовать прямую $y = \frac{18-3x}{5}$ (рис. 1), то координаты $(x; y)$ всех точек этой прямой и будут решениями уравнения.

Замечание. Конечно, можно было найти не y, а x из уравнения (1). Имеем $x = \frac{18-5y}{3}$, тогда решения нашего уравнения запишутся в виде

$$\begin{cases} x = \dfrac{18-5y}{3} \\ y \in R \end{cases}.$$

Нетрудно показать, что и тот, и другой ответы описывают одно и то же множество пар.

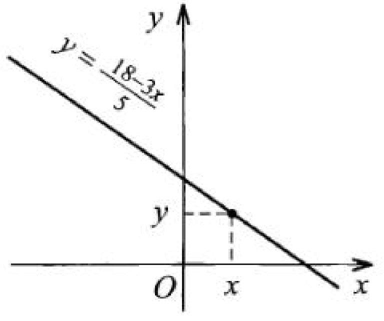


Рис. 1

Перейдем теперь к линейным системам двух уравнений с двумя неизвестными. Общий вид такой системы

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}. \tag{2}$$

Здесь a_1, b_1, a_2, b_2 – произвольные числа, называемые коэффициентами системы, c_1, c_2 – свободные члены, а x и y – переменные.

Рассмотрим примеры:

$$\begin{cases} 3x + 4y = 11 \\ 5x - 2y = 1 \end{cases}; \quad (3) \qquad \begin{cases} 2x + 4y = 11 \\ 2x + 4y = 11 \end{cases}; \quad (4) \qquad \begin{cases} 2x + 4y = 11 \\ 2x + 4y = 15 \end{cases}; \quad (5)$$

$$\begin{cases} x + 0 \cdot y = 3 \\ x + 0 \cdot y = 3 \end{cases}; \quad (6) \qquad \begin{cases} 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \\ 0 \cdot x + 0 \cdot y = 0 \end{cases}. \quad (7)$$

По поводу этих систем заметим следующее. Хотя в системе (4) оба уравнения совпадают, а в системах (6) и (7) – нулевые коэффициенты при неизвестных, все они являются системами двух линейных уравнения с двумя неизвестными, т. к. в определении системы никаких ограничений на коэффициенты нет.

Найдем решения этих систем.

1. В системе (3) из первого уравнения находим $y = \frac{11-3x}{4}$. Подставляя это значение во второе уравнение, находим единственное решение $x = 1$, $y = 2$. Заметим, что пара $x = 1$, $y = 2$ – это одно решение, а не два, как иногда пишут некоторые школьники.

2. Система (4) содержит два одинаковых уравнения. Поэтому, решив любое из них, мы получим решения системы. Имеем, $2x + 4y = 11$, $4y = 11 - 2x$, $y = \frac{11-2x}{4}$. Следовательно, решениями системы будут все па-

ры $\begin{cases} x \in R \\ y = \dfrac{11-2x}{4} \end{cases}$. Геометрически множество решений этой системы есть прямая $y = \dfrac{11-2x}{4}$ (рис. 2), т. е. координаты $(x;\ y)$ всех точек этой прямой будут решениями этой системы.

3. Система (5) решений не имеет, т. к. не может быть одновременно $2x + 4y = 11$ и $2x + 4y = 15$.

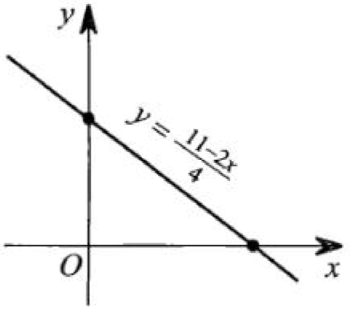


Рис. 2

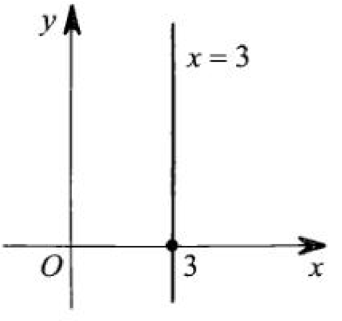


Рис. 3

4. Решениями системы (6) будут пары $\begin{cases} x = 3 \\ y \in R \end{cases}$. Геометрически множество решений представляет собой прямую линию $x = 3$ (рис. 3).

5. Решениями системы (7) будут все пары $\begin{cases} x \in R \\ y \in R \end{cases}$.

Решая системы (3)–(7), мы видели, что некоторые из них имели одно решение, другие – ни одного, третьи – бесконечно много. Далее мы покажем, что эти же результаты верны для любых линейных систем двух уравнений с двумя неизвестными. Мы также установим, при каком соотношении между коэффициентами система имеет одно решение, не имеет решений и имеет бесконечно много решений. А сейчас перейдем к решению задач с параметрами.

§ 2. ИССЛЕДОВАНИЕ ЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ МЕТОДОМ ПОДСТАНОВКИ

Исследование всех линейных систем мы будем проводить методом подстановки, сводя исследование системы с параметрами к исследованию линейного уравнения, а линейные уравнения мы с вами подробно изучали в главе 2.

Рассмотрим примеры.

Задача 2. При всех a определить число решений системы

$$\begin{cases}(3a-1)x+(2a+2)y=4a\\(2a-4)x+(a-1)y=a\end{cases}. \tag{8}$$

Решение. Найдем y из второго уравнения. Так как нам для этого придется делить на $a-1$, рассмотрим сначала случай, когда $a-1=0$.

<u>*Случай 1*</u>. $a=1$. Подставив $a=1$ в исходную систему, получим

$$\begin{cases}2x+4y=4\\x+0\cdot y=1\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2x+4y=4\\x=1\end{cases}. \tag{9}$$

Система (9) имеет одно решение $x=1$, $y=\frac{1}{2}$. <u>Итак, при $a=1$ исходная система имеет одно решение</u>.

<u>*Случай 2*</u>. $a \neq 1$. Тогда из второго уравнения находим

$$(a-1)y=a-(2a-4)x \Leftrightarrow y=\frac{a-(2a-4)x}{a-1}. \tag{10}$$

Подставив это выражение в первое уравнение, после несложных выкладок получим линейное уравнение

$$(9-a^2)x=2a^2-6a. \tag{11}$$

Число решений этого уравнения и будет определять число решений системы.

1. Исходная система имеет бесконечное число решений, если бесконечное число решений имеет уравнение (11). А это будет (см. главу 2), если

$$\begin{cases}9-a^2=0\\a^2-6a=0\end{cases}.$$

Уравнение $9-a^2=0$ имеет корни $a_1=3$, $a_2=-3$. Но второму условию удовлетворяет только $a_1=3$.

2. Исходная система не имеет решений, если не имеет решений уравнение (11). А это будет если

$$\begin{cases}9-a^2=0\\a^2-6a\neq 0\end{cases}.$$

Из корней первого уравнения $a_1=3$, $a_2=-3$ второму неравенству удовлетворяет только $a_2=-3$.

3. Исходная система имеет одно решение, если имеет один корень уравнение (11). А это будет если:

$$9-a^2\neq 0, \text{ т. е. при } a\neq 3 \text{ и } a\neq -3.$$

Учитывая случай 1, можем записать

Ответ: при $a=3$ бесконечное число решений;
при $a=-3$ решений нет;
при $a\neq 3$ и $a\neq -3$ система имеет одно решение.

Замечание. Чтобы полученные результаты были более наглядными, подставим $a=3$ и $a=-3$ в исходную систему.

1. При $a=3$ наша система имеет вид

$$\begin{cases}8x+8y=12\\2x+2y=3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}2x+2y=3\\2x+2y=3\end{cases}.$$

Очевидно, что она имеет бесконечное число решений.

2. При $a=-3$ система имеет вид

$$\begin{cases}-10x-4y=-12\\-10x-4y=-3\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}10x+4y=12\\10x+4y=3\end{cases}.$$

Ясно, что у этой системы нет решений.

Задача 3. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases}(a+3)x+(4a-3)y=3\\3x+(a+1)y=10-a\end{cases} \tag{12}$$

не имеет решений.

Решение. В данной системе лучше всего выразить x из второго уравнения, поскольку коэффициент при нем не зависит от a. Это даст нам возможность обойтись одним случаем. Имеем

$$3x=10-a-(a+1)y; \quad x=\frac{10-a-(a+1)y}{3}.$$

Подставляя это значение x в первое уравнение, после простых преобразований приходим к линейному уравнению:

$$(a^2-8a+12)y=48-2a-a^2. \tag{13}$$

Оно не имеет решений, если

$$\begin{cases}a^2-8a+12=0\\48-2a-a^2\neq 0\end{cases}.$$

Решая первое уравнение, находим $a_1 = 2$, $a_2 = 6$. Но второму условию удовлетворяет только $a_1 = 2$.

Ответ: $a = 2$.

Задача 4. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} a^2x-(a-2)y=a^3+4 \\ ax+(2a-1)y=a^5-2 \end{cases} \tag{14}$$

имеет бесконечное число решений.

Решение. *Случай 1*. $a = 0$. Тогда система (14) имеет вид:

$$\begin{cases} 0\cdot x+2y=4 \\ 0\cdot x-y=-2 \end{cases}.$$

Эта система имеет бесконечное число решений $\begin{cases} x\in R \\ y=2 \end{cases}$. Следовательно, $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Случай 2. $a \neq 0$. Тогда из второго уравнения $x=\dfrac{a^5-2-(2a-1)y}{a}$. Подставив это выражение в первое уравнение, после преобразований получим линейное относительно y уравнение

$$(2a^2-2)y = a^6 - a^3 - 2a - 4. \tag{15}$$

Исходная система имеет бесконечное число решений, когда бесконечное число решений имеет уравнение (15). А это будет при

$$\begin{cases} 2a^2-2=0 \\ a^6-a^3-2a-4=0 \end{cases}.$$

Решая первое уравнение, находим $a_1 = 1$, $a_2 = -1$. Но второму условию удовлетворяет только $a_2 = -1$. Учитывая случай 1, получаем

Ответ: $a = 0$, $a = -1$.

Задача 5. Числа a, b и c таковы, что система уравнений

$$\begin{cases} ax-by=2a-b \\ (c+1)x+cy=10-a+3b \end{cases} \tag{16}$$

имеет бесконечно много решений, причем $x = 1$, $y = 3$ есть одно из них. Найти a, b и c.

Решение. В этой задаче три параметра. Уменьшим число параметров системы. Для этого подставим решения $x = 1$, $y = 3$ в исходную систему. Имеем

$$\begin{cases} a-3b=2a-b \\ c+1+3c=10-a+3b \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+2b=0 \\ a-3b+4c=9 \end{cases}.$$

Мы получили систему двух уравнений с тремя неизвестными. Выразим a и c через b. Из первого уравнения $a = -2b$. С учетом этого из второго уравнения находим $c=\frac{1}{4}(5b+9)$. Подставив $a = -2b$ и $c=\frac{1}{4}(5b+9)$ в исходную систему, получим систему

$$\begin{cases} -2bx-by=-5b \\ (5b+13)x+(5b+9)y=20b+40 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2bx+by=5b \\ (5b+13)x+(5b+9)y=20b+40 \end{cases}. \quad (17)$$

в которой только один параметр b, и нам надо найти такие значения b, при которых система (17) имеет бесконечное число решений.

1. При $b = 0$ система (17) принимает вид

$$\begin{cases} 0\cdot x+0\cdot y=0 \\ 13x+9y=40 \end{cases}.$$

Очевидно, что эта система имеет бесконечное число решений. Следовательно, $b=0$ нам подходит.

2. Если $b \neq 0$, то разделив первое уравнение системы (17) на b, получим равносильную систему:

$$\begin{cases} 2x+y=5 \\ (5b+13)x+(5b+9)y=20b+40 \end{cases}. \quad (18)$$

Подставляя $y = 5 - 2x$ во второе уравнение, приходим к линейному уравнению:

$$(5b + 5)x = 5b + 5 . \quad (19)$$

Последнее уравнение имеет бесконечное число решений при $5b + 5 = 0$, т. е. при $b=-1$. Итак, мы нашли два значения $b=0$ и $b=-1$, при которых система (17) имеет бесконечное число решений. Вспоминая, что $a=-2b$ и $c=\frac{1}{4}(5b+9)$, находим два набора значений a, b и c.

Ответ: $b=0, a=0, c=\frac{9}{4}$; $b=-1, a=2, c=1$.

Задача 6. Найти все значения a, при которых система

$$\begin{cases} 5x-3y=a^2+a+1 \\ 8x+2y=2a^2-3a \\ 2x+5y=4-2a \end{cases} \qquad (20)$$

имеет решения.

Прежде, чем решать эту задачу в общем виде, попытаемся ее «почувствовать». Для этого подставим какое-то конкретное значение параметра a и попытаемся решить полученную систему. Пусть $a=0$, тогда система (20) имеет вид

$$\begin{cases} 5x-3y=1 \\ 8x+2y=0 \\ 2x+5y=4 \end{cases}. \qquad (21)$$

В ней три уравнения и два неизвестных. Такие системы, в которых число уравнений больше, чем число неизвестных, называются *переопределенными*. Взяв первые два уравнения, мы получим линейную систему двух уравнений с двумя неизвестными

$$\begin{cases} 5x-3y=1 \\ 8x+2y=0 \end{cases}.$$

Решением ее будет пара чисел $x=\frac{1}{17}$, $y=-\frac{4}{17}$, но эта пара не удовлетворяет третьему уравнению.

Взяв первое и третье уравнения

$$\begin{cases} 5x-3y=1 \\ 2x+5y=4 \end{cases},$$

мы без труда найдем решение полученной системы. Это пара $x=\frac{17}{31}$, $y=\frac{18}{31}$, но она не удовлетворяет второму уравнению.

Аналогично, взяв второе и третье уравнение, мы найдем $x=-\frac{2}{9}$, $y=\frac{8}{9}$. Но эти числа не удовлетворяют первому уравнению.

Разобранный только что пример показывает, что нам будут подходить такие значения параметра a, при которых решение системы, составленной из двух уравнений системы (20), будет удовлетворять третьему уравнению.

Для нахождения таких значений параметра a поступим следующим образом. Выберем какие-то два уравнения и решим полученную систему. Решения будут зависеть от a. Затем подставим эти решения в третье уравнение. Тем самым мы найдем те a, при которых выполняются все три уравнения. Реализуем сказанное.

Решение. Возьмем второе и третье уравнения исходной системы. Получим систему

$$\begin{cases} 8x+2y=2a^2-3a \\ 2x+5y=4-2a \end{cases}. \tag{22}$$

Решим ее. Из первого уравнения этой системы

$$y=\frac{2a^2-3a-8x}{2}. \tag{23}$$

Подставив значение y во второе уравнение, после несложных преобразований найдем $x=\frac{1}{36}(10a^2-11a-8)$. Подставив теперь это выражение для x в (23), найдем $y=\frac{1}{18}(16-5a-2a^2)$.

Пара $\begin{cases} x=\dfrac{1}{36}(10a^2-11a-8) \\ y=\dfrac{1}{18}(16-5a-2a^2) \end{cases}$ – решение системы (22). Подставим теперь эту пару в первое уравнение исходной системы. Имеем

$$5\cdot\frac{10a^2-11a-8}{36}-3\cdot\frac{16-5a-2a^2}{18}=a^2+a+1. \tag{24}$$

После несложных преобразований уравнение (24) приводится к квадратному $26a^2-61a-172=0$. Его корни $a_1=4$, $a_2=-\frac{43}{26}$. Это и есть те a, при которых все три уравнения имеют одно и то же решение.

Ответ: $a_1=4,\ a_2=-\frac{43}{26}$.

Для большей наглядности полученных результатов, подставим найденные значения a в исходную систему (20). При $a=4$ получаем:

$$\begin{cases} 5x-3y=21 \\ 8x+2y=20 \\ 2x+5y=-4 \end{cases}. \tag{25}$$

Если решить систему из первых двух уравнений этой системы, мы найдем единственное решение $x=3$, $y=-2$. Это решение удовлетворяет третьему уравнению. При $a=-\frac{43}{26}$ будет та же самая картина, только другая пара чисел будет решением системы.

Задача 7 [1]. При каких значениях a имеет решения система

$$\begin{cases} \sin x-4=3a-2^{1+y^2} \\ 2^{2+y^2}-3=a+3\sin x \end{cases}. \qquad (26)$$

Решение. Воспользовавшись тем, что $2^{1+y^2}=2\cdot 2^{y^2}$ и $2^{2+y^2}=4\cdot 2^{y^2}$, перепишем систему (26) в виде:

$$\begin{cases} \sin x+2\cdot 2^{y^2}=3a+4 \\ 3\sin x-4\cdot 2^{y^2}=-a-3 \end{cases}. \qquad (27)$$

Теперь видно, что система (27) – линейная относительно $\sin x$ и 2^{y^2}. Обозначим для удобства $t=\sin x$, $z=2^{y^2}$. Тогда система (27) примет вид:

$$\begin{cases} t+2z=3a+4 \\ 3t-4z=-a-3 \end{cases}. \qquad (28)$$

Находя t из первого уравнения и подставляя во второе, мы легко найдем ее решение $\begin{cases} t=a+1 \\ z=a+1{,}5 \end{cases}$. Вспоминая наши обозначения, получаем систему

$$\begin{cases} \sin x=a+1 \\ 2^{y^2}=a+1{,}5 \end{cases}. \qquad (29)$$

Так как $-1\le \sin x\le 1$ и $2^{y^2}\ge 1$ (обоснуйте почему!), то чтобы система (29) имела решения, должны выполняться неравенства

$$\begin{cases} -1\le a+1\le 1 \\ a+1{,}5\ge 1 \end{cases} \Leftrightarrow a\in[-0{,}5;\,0].$$

Ответ: $a\in[-0{,}5;\,0]$.

В следующих задачах основные трудности – логические. Как иногда говорят, для решения таких задач требуется «железная» логика [2]. Особенно

[1] Если вы в школе еще не изучали показательную и тригонометрические функции, этот пример без ущерба для дальнейшего можно пропустить.

[2] При первом чтении эти задачи можно пропустить.

сложна в этом плане последняя задача. Мы разберем все их подробно, чтобы вы поняли, как надо подходить к таким задачам, анализировать их и решать.

Задача 8. При каких значениях a система

$$\begin{cases} 3x + y = b \\ 2bx - 2y = a + 4 \end{cases} \tag{30}$$

имеет решения при любом значении параметра b.

Фраза «при любом значении параметра b ...» многих школьников ставит в тупик. Одни считают, что надо искать значения обоих параметров a и b, другие, что искать надо только значения параметра a, а значения параметра b можно взять произвольно. И то, и другое неверно.

Анализ задачи. В этой задаче два параметра a и b. Но мы ищем только значения параметра a. Параметр b не ищется. Относительно параметра b в задаче требуется только то, чтобы система (30) имела решение при любом значении $b \in R$.

Поскольку условия таких задач трудны для восприятия, неискушенному в математике школьнику я советую про себя повторять условие задачи. При этом фраза, которая должна все время крутиться в голове, должна быть такой: «Я ищу такое число a, что для любого числа b система (30) имеет решение».

Вернемся к анализу условия этой задачи. Итак, мы ищем значения параметра a, для которых при любом значении другого параметра b система (30) имеет решения.

Давайте возьмем несколько произвольных значений параметра a, подставим их в исходную систему и посмотрим, подходят ли они нам, а если не подходят, то почему. Это даст нам возможность увидеть общую закономерность, которая и позволит решить нашу задачу.

1. $a = 5$. Тогда система (30) имеет вид

$$\begin{cases} 3x + y = b \\ 2bx - 2y = 9 \end{cases}. \tag{31}$$

Если окажется, что система (31) имеет решения при любом значении $b \in R$, то $a = 5$ удовлетворяет условиям задачи; если при каком-то b система не будет иметь решений, то $a = 5$ не удовлетворяет условиям задачи. Сведем эту систему к исследованию одного уравнения. Из первого уравнения $y = b - 3x$. Подставляя это значение y во второе уравнение, получим

$$(2b + 6)x = 9 + 2b\,. \tag{32}$$

Система (31) будет иметь решения при всех $b \in R$, если при всех $b \in R$ будет иметь решения уравнение (32). Но, очевидно, уравнение (32) не имеет решений, когда $2b + 6 = 0$, т. е. при $b = -3$. Следовательно, $a = 5$ не удовлетворяет условию задачи.

2. $a = 10$. При $a = 10$ система (30) имеет вид

$$\begin{cases} 3x + y = b \\ 2bx - 2y = 14 \end{cases}. \tag{33}$$

Итак, опять надо понять – имеет ли система (33) решения при любом b. Подставив $y = b - 3x$ во вторые уравнение, получим

$$(2b + 6)x = 2b + 14\,. \tag{34}$$

Система (33) будет иметь решения при любом b, если при любом b будет иметь решение уравнение (34). Но уравнение (34) также не имеет решений при $b = -3$. Следовательно, $a = 10$ также не удовлетворяет условию задачи.

Теперь примерно ясно. При любом a исходная система скорее всего сведется к уравнению вида (32) или (34). То есть коэффициент при x будет равным $(2b + 6)$. Следовательно, значение a надо подбирать так, чтобы при $2b + 6 = 0$ полученное уравнение имело корни.

Решение. Из первого уравнения $y = b - 3x$. Подставляя это значение y во второе уравнение, получим

$$(2b + 6)x = a + 2b + 4\,. \tag{35}$$

Теперь задача свелась к следующей: найти все a, такие, что при любом значении b уравнение (35) имеет решения.

1. Уравнение (35) имеет решение при любом $b \neq -3$.

2. Чтобы оно имело решение при $b = -3$, его правая часть при этом значении b должна равняться нулю. Подставляя $b = -3$ в правую часть (35), имеем $a + 2 \cdot (-3) + 4 = 0$, откуда находим $a = 2$.

Ответ: при $a = 2$ система имеет решения при любом значении b.

Хотя это и не требуется в задаче, для того, чтобы наглядно продемонстрировать полученный результат, подставим $a = 2$ в исходную систему. Имеем

$$\begin{cases} 3x + y = b \\ 2bx - 2y = 6 \end{cases}. \tag{36}$$

Я утверждаю, что система (36) имеет решения при любом b. Действительно, из первого уравнения $y = b - 3x$. Подставив это значение y во второе уравнение, получим

$$(2b + 6)x = 2b + 6 . \tag{37}$$

Уравнение (37) имеет решения при любом $b \in R$. Следовательно, и система (37) имеет решения при любом $b \in R$.

Задача 9. Найти все значения a такие, что хотя бы при одном значении b система

$$\begin{cases} 3x + y = b \\ 2bx - 2y = a + 4 \end{cases} \tag{38}$$

имеет решение.

В условии этой задачи, по сравнению с предыдущей, практически изменено одно слово: в предыдущей задаче требовалось, чтобы система имела решения при любом b, а в этой задаче она должна иметь решения хотя бы при одном b. Но мы увидим, что это «одно слово» полностью изменит ответ задачи.

Решение. Как обычно, сведем исследование системы (38) к исследованию линейного уравнения. Из первого уравнения $y = b - 3x$. Подставив это значение y во второе уравнение, получим

$$(2b + 6)x = a + 2b + 4 . \tag{39}$$

Теперь исходная задача свелась к следующей: найти все такие значения a, что для каждого из них найдется хотя бы одно b такое, что уравнение (39) при данных a и b имеет решение. Я утверждаю, что решением задачи будут все $a \in R$.

Чтобы это показать, нам надо для каждого значения a указать значение b, при которых уравнение (39) имеет решения. Но оказывается можно указать значение b, которое подходит для всех a. Например, $b = 5$. Действительно, при $b = 5$ уравнение (39) имеет вид:

$$16x = a + 14 . \tag{40}$$

Ясно, что уравнение (40) имеет решения при любом $a \in R$.

Ответ: $a \in R$.

Задача 10. Найти все b, при которых для любого значения a, система

$$\begin{cases} 3x + y = b \\ 2bx - 2y = a + 4 \end{cases} \tag{41}$$

имеет решения.

В условии этой задачи, по сравнению с задачей 8 a и b поменялись ролями.

Решение. Подставляя $y = b - 3x$ во второе уравнение, получим:

$$(2b + 6)x = a + 2b + 4\,. \tag{42}$$

Теперь наша задача свелась к следующей. Найти все b, при которых уравнение (42) имеет решения при любом значении a.

1. При любом $b \neq -3$, уравнение (42) имеет одно решение независимо от a (т. е. при любом a).

2. Если $b = -3$, то уравнение (42) имеет вид

$$0 \cdot x = a - 2\,. \tag{43}$$

Ясно, что оно имеет решения не при любом a. Например, при $a = 3$ оно не имеет решений. Следовательно, $b = -3$ условию задачи не удовлетворяет.

Ответ: $b \in R,\ b \neq -3$.

Задача 11. Найти все значения a такие, что для любого значения b, найдется такое c, что система уравнений

$$\begin{cases} bx - y = ac^2 \\ (b-4)x + 3by = 1 - 2c \end{cases} \tag{44}$$

имеет хотя бы одно решение.

Анализ задачи. В этой системе три параметра a, b и c. Мы ищем только значения параметра a.

Относительно параметров b и c сказано следующее: «...для любого значения b найдется такое c, что система (44) имеет хотя бы одно решение». Другими словами, если a – «хорошее» число, т. е. удовлетворяет условиям задачи, то какое бы мы ни взяли число b, всегда можно подобрать такое c, что при этих значениях a, b и c система (44) будет иметь хотя бы одно решение.

Как мы увидим ниже, подбирая соответствующие значения c, мы сможем «подправлять плохие значения b» так, что исходная система будет иметь решения.

Чтобы опять-таки «почувствовать» задачу, возьмем некоторое произвольное значение a и посмотрим, удовлетворяет ли оно условиям задачи, а если нет, то почему.

Пусть $a = 1$. Тогда система (44) имеет вид

$$\begin{cases} bx - y = c^2 \\ (b-4)x + 3by = 1 - 2c \end{cases}. \tag{45}$$

Если для любого b мы сможем указать такое значение c, что система (45) будет иметь хотя бы одно решение, то $a = 1$ будет удовлетворять всем условиям нашей задачи и будет одним из ее решений.

Проверим это. Как и ранее, сведем исследование системы к исследованию линейного уравнения. Подставив $y = bx - c^2$ во второе уравнение, получим линейное относительно x уравнение

$$x(3b^2 + b - 4) = 3bc^2 - 2c + 1 . \tag{46}$$

Теперь наша задача свелась к следующей: проверить, для каждого ли $b \in R$ можно указать такое число c, что уравнение (46) при этих b и c имеет решения.

Если выражение $3b^2 + b - 4$, являющееся коэффициентом при x, не равно 0, т. е. $b \neq -\frac{4}{3}$ и $b \neq 1$, то уравнение (46) имеет решение независимо от значения c, т. е. c можно взять любым. Например, $c = 2$. А вот при $b = -\frac{4}{3}$ или $b = 1$ коэффициент при x в уравнении (46) равен 0 и оно не всегда будет иметь решения.

Рассмотрим эти значения b отдельно.

1. При $b = -\frac{4}{3}$ уравнение (46) принимает вид

$$0 \cdot x = -4c^2 - 2c + 1 . \tag{47}$$

Чтобы оно имело решения, его правая часть должна равняться нулю. Имеем $-4c^2 - 2c + 1 = 0$. Откуда находим $c_1 = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$, $c_2 = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$.

Таким образом, при значении параметра $b = -\frac{4}{3}$, взяв в качестве значения параметра c любое из чисел c_1 или c_2 и подставив его в (47), получим уравнение

$$0 \cdot x = 0 ,$$

которое имеет, решения и даже бесконечное число решений. (Это и означает требуемое в условии задачи: «Для данного b указать такое число c, что уравнение имеет решение».)

2. При $b = 1$ уравнение (46) принимает вид

$$0 \cdot x = 3c^2 - 2c + 1 . \tag{48}$$

Чтобы оно имело решения, должно быть

$$3c^2 - 2c + 1 = 0 . \tag{49}$$

Но квадратное уравнение (49) решений не имеет. Следовательно, для $b = 1$ не удалось найти такое c, чтобы уравнение (46) имело решения, т. е. «подправить» правую часть уравнения так, чтобы она равнялась 0.

Итак, мы получили следующий результат. При $a = 1$ уравнение (46) имеет решения:

1. при всех b, $b \neq -\frac{4}{3}$ и $b \neq 1$;. при этом в качестве c можно взять любое число, например, $c = 2$;

2. при $b = -\frac{4}{3}$ оно также имеет решения, но в качестве c надо взять одно из двух чисел $c = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ или $c = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$;

3. при $b = 1$ оно не имеет решений ни при каком c.

Следовательно, из-за пункта 3 значение $a = 1$ не удовлетворяет условию задачи.

Теперь становится примерно ясным, в каком направлении нам двигаться. Скорее всего, мы будем приходить к уравнению вида (46) и нам надо будет выбирать такие a, чтобы полученное квадратное уравнение относительно c имело корни.

Перейдем к решению задачи в общем виде.

Решение. Сведем нашу систему к исследованию линейного уравнения. Из первого уравнения (44) находим $y = bx - ac^2$. Подставляя это значение y во второе уравнение, после несложных преобразований получим линейное относительно x уравнение

$$x(3b^2 + b - 4) = 3abc^2 - 2c + 1 . \tag{50}$$

Теперь исходная задача свелась к следующей: найти все значения a, при которых для любого $b \in R$ найдется такое c, что уравнение (50) имеет решения.

Рассмотрим отдельно $a = 0$. При $a = 0$ уравнение (50) имеет вид

$$x(3b^2 + b - 4) = 1 - 2c\ .$$

При $c = \frac{1}{2}$ его правая часть равна 0, и, следовательно, оно будет иметь решения при любом b. Таким образом, $a = 0$ удовлетворяет условию задачи.

Пусть $a \neq 0$. Тогда, если $3b^2 + b - 4 \neq 0$, т. е. $b \neq 1$ и $b \neq -\frac{4}{3}$, то коэффициент при x в уравнении (50) отличен от 0. Поэтому оно имеет решения при всех $a \in R$. В качестве c можно взять любое число.

Однако, согласно условию задачи, уравнение (50) должно иметь решения также и при $b = 1$ и $b = -\frac{4}{3}$. При этих значениях b коэффициент при x в уравнении (50) равен 0, и существование решений в уравнении (50) будет уже проблематичным. Сейчас мы как раз и выясним, при каких ограничениях на a это уравнение будет иметь решения при $b = 1$ и $b = -\frac{4}{3}$.

1. При $b = 1$ уравнение (50) принимает вид

$$0 \cdot x = 3ac^2 - 2c + 1\ . \qquad (51)$$

Чтобы оно имело решения, его правая часть должна равняться нулю:

$$3ac^2 - 2c + 1 = 0\ . \qquad (52)$$

Поскольку мы рассматриваем $a \neq 0$, то уравнение (52) представляет собой квадратное уравнение относительно c. Оно будет иметь решения, если его дискриминант будет ≥ 0. Имеем, $\mathrm{D} = 4 - 12a$. Решая неравенство $4 - 12a \geq 0$, с учетом $a \neq 0$, находим $a \leq \frac{1}{3}$, $a \neq 0$.

Итак, мы получили, что при $a \leq \frac{1}{3}$, $a \neq 0$, будут существовать такие значения c, при которых правая часть уравнения (51) равна 0, и следовательно, само уравнение имеет решения.

2. $b = -\frac{4}{3}$. При $b = -\frac{4}{3}$ уравнение (50) имеет вид

$$0 \cdot x = -4ac^2 - 2c + 1\ . \qquad (53)$$

Оно имеет решения, если

$$4ac^2 + 2c - 1 = 0\ . \qquad (54)$$

Аналогично, рассмотрим (54) как квадратное относительно c уравнение. Оно будет иметь решения, если его дискриминант будет неотрицательным. Имеем

$$\mathrm{D} = 2^2 - 4 \cdot 4a \cdot (-1) = 4 + 16a\ .$$

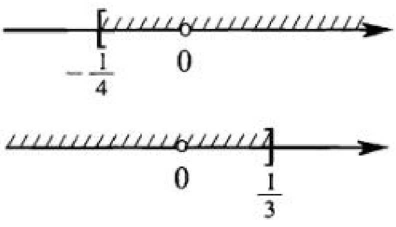


Рис. 4

Решая неравенство $D = 4 + 16a \geq 0$, с учетом $a \neq 0$, находим $a \geq -\frac{1}{4}$, $a \neq 0$. Итак, при $a \geq -\frac{1}{4}$, $a \neq 0$ будут существовать такие значения c, при которых правая часть (53) равна 0, и, следовательно, само уравнение имеет решения. Беря теперь пересечение множеств $a \geq -\frac{1}{4}$, $a \neq 0$ и $a \leq \frac{1}{3}$, $a \neq 0$ (рис. 4) получим $a \in [-\frac{1}{4};0) \cup (0;\frac{1}{3}]$. Добавляя значение $a = 0$, которое мы рассмотрели отдельно и которое удовлетворяет условиям задачи, получаем

Ответ: $a \in [-\frac{1}{4};\frac{1}{3}]$.

§ 3. СООТНОШЕНИЯ МЕЖДУ КОЭФФИЦИЕНТАМИ СИСТЕМЫ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ЧИСЛА РЕШЕНИЙ

Рассмотрим теперь в общем виде, как «устроены» линейные системы, имеющие одно решение, бесконечно много и не имеющие решений.

Пусть дана система уравнений

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}. \tag{55}$$

Будем считать, что все коэффициенты второго уравнения отличны от нуля, т. е. a_2, b_2, $c_2 \neq 0$. Тогда из второго уравнения системы, находим

$$y = \frac{c_2 - a_2x}{b_2}.$$

Подставляя это выражение в первое уравнение системы, после несложных преобразований получаем линейное уравнение

$$(a_2b_1 - b_2a_1)x = c_2b_1 - b_2c_1. \tag{56}$$

Число решений этого уравнения и будет полностью определять число решений системы. Проанализируем его.

Как мы знаем (см. главу 2), линейное уравнение может иметь одно решение, бесконечно много решений, не иметь решений.

Уравнение (56) имеет бесконечное число решений, если

$$\begin{cases} a_2b_1 - b_2a_1 = 0 \\ c_2b_1 - b_2c_1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a_2b_1 = b_2a_1 \\ c_2b_1 = b_2c_1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \\ \dfrac{b_1}{b_2} = \dfrac{c_1}{c_2} \end{cases} \Leftrightarrow \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}\ .$$

В этом случае и система (55) имеет бесконечное число решений.

Уравнение (56) (а следовательно, и исходная система) не имеют решений, если

$$\begin{cases} a_2b_1 - b_2a_1 = 0 \\ c_2b_1 - b_2c_1 \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{a_1}{a_2} = \dfrac{b_1}{b_2} \\ \dfrac{b_1}{b_2} \neq \dfrac{c_1}{c_2} \end{cases},\ \text{т.е.}\ \ \frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}\ .$$

И, наконец, уравнение (56) имеет одно решение, если $a_2b_1 - b_2a_1 \neq 0 \Leftrightarrow \dfrac{a_1}{a_2} \neq \dfrac{b_1}{b_2}$. В этом случае и система (55) имеет одно решение.

Итак, мы показали, что при отличии коэффициентов второго уравнения a_2, b_2, c_2 от нуля, система (55) имеет:

1. бесконечное число решений, если

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} = \frac{c_1}{c_2}\ ; \tag{57}$$

2. не имеет решений, если

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{b_1}{b_2} \neq \frac{c_1}{c_2}\ ; \tag{58}$$

3. имеет единственное решение, если

$$\frac{a_1}{a_2} \neq \frac{b_1}{b_2}\ . \tag{59}$$

Примеры.

$$\begin{cases} 2x + 3y = 7 \\ 14x + 21y = 49 \end{cases};(60) \qquad \begin{cases} 4x + 3y = 8 \\ 8x + 6y = 12 \end{cases}; \quad (61) \qquad \begin{cases} 5x + 3y = 2 \\ 4x - 2y = 1 \end{cases}. \quad (62)$$

Система (60) имеет бесконечное число решений, т. к. $\dfrac{2}{14} = \dfrac{3}{21} = \dfrac{7}{49}$.

Система (61) не имеет решений, т. к. $\dfrac{4}{8} = \dfrac{3}{6} \neq \dfrac{8}{12}$.

Система (62) имеет одно решение, т. к. $\frac{5}{4} \neq \frac{3}{-2}$.

Соотношения (57)–(59) могут использоваться и при исследовании линейных систем с параметрами. Но в конкретных задачах при использовании этих соотношений необходимо отдельно рассмотреть случаи $a_2 = 0$, $b_2 = 0$, $c_2 = 0$. Рассмотрим пример.

Задача 12. При каких значениях a система

$$\begin{cases} 6x + (a+1)y = a+3 \\ (a+2)x + (2a-2)y = 4a-13 \end{cases} \tag{63}$$

имеет бесконечное число решений; не имеет решений.

Решение. Чтобы рассматривать меньше случаев, поменяем уравнения местами [1]:

$$\begin{cases} (a+2)x + (2a-2)y = 4a-13 \\ 6x + (a+1)y = a+3 \end{cases} \tag{64}$$

<u>*Случай 1*</u>. $a + 1 = 0$, т. е. $a = -1$. Тогда система (64) имеет вид:

$$\begin{cases} x - 3y = -9 \\ 6x + 0 \cdot y = 1 \end{cases}.$$

Ее единственным решением является пара чисел $x = \frac{1}{6}$, $y = \frac{55}{18}$. Следовательно, $a = -1$ не удовлетворяет условию задачи

<u>*Случай 2*</u>. $a + 3 = 0$, т. е. $a = -3$. Тогда система (64) имеет вид

$$\begin{cases} -x - 8y = -25 \\ 6x - 2y = 0 \end{cases}.$$

Единственным решением ее будет пара $x = 1$, $y = 3$. Следовательно, $a = -3$ также не удовлетворяет условию задачи.

<u>*Случай 3*</u>. $a \neq -1$ и $a \neq -3$. Тогда система имеет бесконечное число решений, если

$$\frac{a+2}{6} = \frac{2a-2}{a+1} = \frac{4a-13}{a+3}. \tag{65}$$

Из первого равенства получаем

$$(a+2)(a+1) = 6(2a-2) \Leftrightarrow a^2 - 9a + 14 = 0.$$

---

[1] Какое из двух уравнений системы считать первым, а какое вторым, конечно же условно. Поменяв уравнения местами, мы всегда сделаем нужное нам уравнение вторым.

Отсюда находим $a = 7$ или $a = 2$. Подставляя $a = 7$ в равенства (65), получаем верное равенство

$$\frac{9}{6} = \frac{12}{8} = \frac{15}{10} .$$

При $a = 2$ получаем

$$\frac{4}{6} = \frac{2}{3} \neq \frac{-5}{5} .$$

Итак, система имеет бесконечное число решений при $a = 7$.

Система (64) не имеет решений, если

$$\frac{a+2}{6} = \frac{2a-2}{a+1} \neq \frac{4a-13}{a+3} . \qquad (66)$$

Условиям (66) удовлетворяет только $a = 2$.

Ответ: при $a = 7$ система имеет бесконечное число решений;
при $a = 2$ решений нет.

§ 4. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ РЕШЕНИЙ

Пусть дана линейная система

$$\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases} . \qquad (67)$$

Будем считать, что хотя бы один из коэффициентов a_1 или b_1 в первом уравнении и a_2 или b_2 во втором уравнении $\neq 0$. Тогда каждое из уравнений системы (67) определяет на плоскости xOy прямую линию. Пусть первому уравнению соответствует прямая l_1, а второму – l_2. Возможны три случая расположения этих прямых.

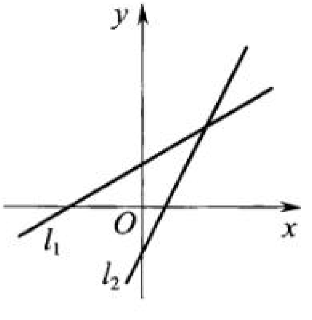


Рис. 5

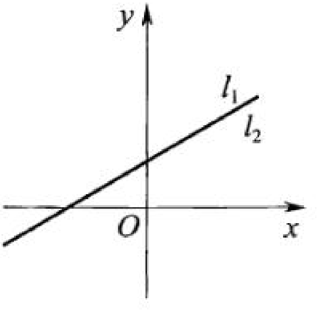


Рис. 6

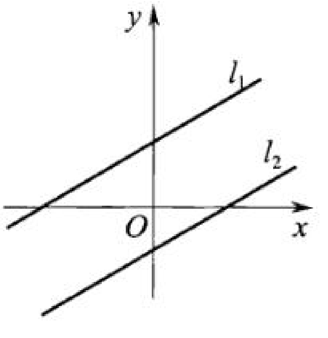


Рис. 7

а) Прямые пересекаются (рис. 5). В этом случае система (67) имеет одно решение. Нетрудно показать, что условие пересечения прямых равносильно условиям (59).

б) Прямые совпадают (рис. 6). В этом случае система (67) имеет бесконечно много решений. Это равносильно соотношениям (57).

с) Прямые параллельны друг другу, не совпадая (рис. 7). В этом случае система не имеет решений. Это равносильно соотношениям (58).

Случай, когда оба коэффициента одного или двух уравнений системы равны 0, рассмотрите самостоятельно.

Замечание. В пособиях для школьников часто для исследования линейных систем используются определители. Поскольку определители не входят в школьную программу, чтобы не перегружать книгу новыми понятиями, я не ввожу их. Желающие могут познакомиться с понятием определителя и применением их к исследованию линейных систем в любом из следующих пособий $[3;\ 6;\ 9]$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

При каких a следующие системы уравнений имеют бесконечно много решений:

1. $\begin{cases}(a-2)x+27y=4{,}5\\ 2x+(a+1)y=-1\end{cases}$;

2. $\begin{cases}(a+4)x-(a+3)y=7a+6\\ 2ax-ay=a^4\end{cases}$;

3. $\begin{cases}2ax+y=6a^2-5a+1\\ x+2ay=0\end{cases}$.

При каких a системы уравнений не имеют решений:

4. $\begin{cases}2x+(9a^2-2)y=6a-2\\ x+y=1\end{cases}$;

5. $\begin{cases}(2a+6)x+(3a+1)y=3-2a\\ (3a+10)x+5ay=-14\end{cases}$.

При каких a системы уравнений имеют одно решение:

6. $\begin{cases}(a+1)x-y=a\\ (a-3)x+ay=-9\end{cases}$;

7. $\begin{cases}(2a-3)x-ay=3a-2\\5x-(2a+3)y=5\end{cases}$.

При всех a решить следующие системы уравнений:

8. $\begin{cases}ax+y=a\\ax+ay=1\end{cases}$;

9. $\begin{cases}(2a+4)x-(5a+3)y=2a-4\\(a+2)x-3ay=a-2\end{cases}$.

10. Найти все значения параметра b, при каждом из которых система уравнений $\begin{cases}bx+2y=b+2\\2bx+(b+1)y=2b+4\end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

11. Найдите все пары значений (a, b), при каждой из которых система уравнений $\begin{cases}8x+(a^2+ab+b^2)y=4\\(a-b)x+26y=2\end{cases}$ имеет бесконечное число решений.

12. При каких c и d система уравнений $\begin{cases}(c-2)^2x+(c+2)y=c-6\\(d+3)x+(d-1)y=c-2d+4\end{cases}$ имеет единственное решение $x=-1$, $y=2$?

13. При всех значениях параметра a решить систему $\begin{cases}x+2y=3\\ax-4y=-6\\x+y=1\end{cases}$.

14. Найти все значения b, для каждого из которых числа x и y, удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases}3x+y=b\\(x+2y=2b+1\end{cases}$ удовлетворяют также неравенству $x>3y$.

15. Найти все значения a, при которых прямые $3x+2ay=1$ и $3(a-1)x-ay=1$: а) пересекаются в одной точке; б) совпадают; в) не имеют общих точек.

16. При каких c и d системы уравнений $\begin{cases}x-3y=d^2-2\\2x+y=5\end{cases}$.

$\begin{cases} 2x + 4dy = 3c + 2 \\ x + 2y = 4 \end{cases}$ являются равносильными?

БОЛЕЕ ТРУДНЫЕ ЗАДАЧИ

17. При каких значениях параметра b система $\begin{cases} 3x - ay = b \\ 2x + y = a \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение при любом значении параметра a?

18. При каких значениях параметра a для любого значения b найдется такое значение параметра c, что система $\begin{cases} 2x + by = ac^2 + c \\ bx + 2y = c - 1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение?

19. Найти все пары чисел a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0 \\ 2x + 3y + z = 1 \\ x + 2y + az = b \end{cases}$$

a) имеет единственное решение;

b) имеет бесконечно много решений.

Найти эти решения.

20. При каких $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$ система уравнений

$\begin{cases} (\cos\alpha + 1)x + 2y\sin\alpha = \operatorname{tg}\alpha \\ 4x\sin\alpha + 3y = 1 \end{cases}$ имеет бесконечное число решений?

21. При каких значениях a система $\begin{cases} 6 \cdot 2^{x^2} + 2 = 4a - \sin y \\ 5\sin y + 10 = a + 2^{3+x^2} \end{cases}$ имеет решения?

22. При каких значениях параметра m утверждение: «система уравнений $\begin{cases} 2x + my = 5 \\ mx + 8y = 10 \end{cases}$ имеет единственное решение» является неверным?

Глава 8

СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Мой опыт занятий со школьниками показывает, что большинство из них не умеет решать нелинейные алгебраические системы. Поэтому, прежде чем переходить к системам с параметрами, рассмотрим стандартные методы решения обычных нелинейных систем без параметров.

§ 1. МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

1. Метод подстановки

Задача 1. Решить систему уравнений

$$\begin{cases} x+y=10 \\ xy=16 \end{cases}. \tag{1}$$

Решение. Из первого уравнения находим $y = 10 - x$. Подставив это выражение для y во второе уравнение, получим

$$x(10-x) = 16 \Leftrightarrow x^2 - 10x + 16 = 0 .$$

Откуда находим $x_1 = 2$, $x_2 = 8$.

Подставляя эти значения в $y = 10 - x$, получаем $y_1 = 10 - 2 = 8$, $y_2 = 10 - 8 = 2$.

Ответ: $\{ (2; 8), (8, 2)\}$.

Задача 2. Решить систему

$$\begin{cases} 2x+3y=16 \\ 2x^2-3xy+4y^2+6x-8y=28 \end{cases}.$$

Решение. В этой системе поступим аналогично: найдем y из первого уравнения и подставим во второе. Имеем, $y = \dfrac{16-2x}{3}$. Подставляя это выражение во второе уравнение, получаем

$$2x^2-3x\cdot\frac{16-2x}{3}+4\left(\frac{16-2x}{3}\right)^2+6x-8\cdot\frac{16-2x}{3}=28 .$$

После раскрытия скобок и приведения подобных членов, последнее уравнение приводится к квадратному

$$26x^2 - 149x + 194 = 0\,.$$

Его корни $x_1 = 2$, $x_2 = \dfrac{97}{26}$. Подставляя эти значения x в выражение $y = \dfrac{16-2x}{3}$, находим $y_1 = 4$, $y_2 = \dfrac{37}{13}$.

Ответ: $\{(2;\,4),\,(\frac{97}{26};\frac{37}{13})\}$.

Задача 3. Решить систему

$$\begin{cases} 2x - 3xy - 4y = 23 \\ |3x + 3| + 3y = xy \end{cases}.$$

Решение. И в этой системе применим метод подстановки. Найдем y из второго уравнения. Имеем:

$$|3x+3| = xy - 3y \quad \text{или} \quad |3x+3| = y(x-3)\,.$$

Из последнего уравнения видно, что $x = 3$ не является его решением. Поэтому, разделив обе его части на $x - 3$, получим равносильное уравнение

$$y = \frac{|3x+3|}{x-3}\,.$$

Подставив это выражение для y в первое уравнение системы, получаем

$$2x - 3x\frac{|3x+3|}{x-3} - 4\frac{|3x+3|}{x-3} = 23\,.$$

После перенесения всех членов в левую часть и приведения подобных, имеем

$$\frac{2x^2 - 29x + 69 - (3x+4)|3x+3|}{x-3} = 0\,.$$

Так как $x \neq 3$, то отбрасывая знаменатель, приходим к равносильному уравнению с модулем:

$$2x^2 - 29x + 69 - (3x+4)\,|3x+3| = 0\,. \tag{2}$$

Для его решения рассмотрим два случая:

Случай 1. $3x + 3 \geq 0$. Тогда $|3x + 3| = 3x + 3$ и мы получаем уравнение

$$2x^2 - 29x + 69 - (3x+4)(3x+3) = 0 \Leftrightarrow 7x^2 + 50x - 57 = 0\,.$$

Его корни $x_1 = 1$, $x_2 = -\dfrac{57}{7}$. Но условию $3x + 3 \ge 0$ удовлетворяет только $x_1 = 1$. Следовательно, корнем является только $x_1 = 1$.

<u>*Случай 2*</u>. $3x + 3 \le 0$. Тогда $|3x + 3| = -3x - 3$. Подставляя это выражение в (2), получаем

$$2x^2 - 29x + 69 - (3x + 4)(-3x - 3) = 0\,.$$

После раскрытия скобок и приведения подобных приходим к уравнению $11x^2 - 8x + 81 = 0$. Последнее уравнение корней не имеет, т. к. $D < 0$.

Итак, уравнение (2) имеет только один корень $x = 1$. Вспоминая, что $y = \dfrac{|3x+3|}{x-3}$, находим $y = \dfrac{|3\cdot 1+3|}{1-3} = -3$.

Ответ: $\{(1; -3)\}$.

2. Введение новых переменных

Суть метода состоит в введении новых переменных, относительно которых данная система легко решается, после чего возвращаются к старым переменным.

Задача 4. Решить систему

$$\begin{cases} x + \dfrac{x}{y} + y = \dfrac{43}{5} \\ \dfrac{(x+y)x}{y} = \dfrac{24}{5} \end{cases}. \tag{3}$$

Решение. Перепишем второе уравнение в виде

$$(x + y)\cdot\frac{x}{y} = \frac{43}{5}\,.$$

Если теперь обозначить $x + y = a$, $\dfrac{x}{y} = b$, то систему (3) можно переписать в виде

$$\begin{cases} a + b = \dfrac{43}{5} \\ ab = \dfrac{24}{5} \end{cases}. \tag{4}$$

Последняя система легко решается. Из первого уравнения $a = \frac{43}{5} - b$. Подставив это выражение во второе уравнение, получаем

$$b(\frac{43}{5} - b) = \frac{24}{5} \Leftrightarrow 5b^2 - 43b + 24 = 0 .$$

Откуда находим $b_1 = \frac{3}{5}$, $b_2 = 8$. Так как $a = \frac{43}{5} - b$, то получаем $a_1 = \frac{43}{5} - \frac{3}{5} = 8$; $a_2 = \frac{43}{5} - 8 = \frac{3}{5}$.

Итак, решениями системы (4) являются:

$$\begin{cases} a_1 = 8 \\ b_1 = \frac{3}{5} \end{cases}; \qquad \begin{cases} a_2 = \frac{3}{5} \\ b_2 = 8 \end{cases}.$$

Вспоминая теперь наши обозначения $a = x + y$ и $b = \frac{x}{y}$, приходим к двум системам относительно x и y

$$\begin{cases} x + y = 8 \\ \frac{x}{y} = \frac{3}{5} \end{cases}; \qquad \begin{cases} x + y = \frac{3}{5} \\ \frac{x}{y} = 8 \end{cases}.$$

Решим первую систему. Из второго уравнения $x = \frac{3}{5}y$. Подставляя это значение x в первое уравнение, находим $y = 5$. Следовательно, $x = \frac{3}{5} \cdot 5 = 3$. Итак, одно решение мы нашли: $x = 3$, $y = 5$. Решая аналогично вторую систему, найдем еще одно решение $x = \frac{8}{15}$, $y = \frac{1}{15}$.

Ответ: $\{(\frac{8}{15}; \frac{1}{15}), (3;5)\}$.

Задача 5. Решить систему

$$\begin{cases} x^2y + xy^2 = 20 \\ 5x + 2xy + 5y = 33 \end{cases}. \qquad (5)$$

Решение. Перепишем систему (5) в виде:

$$\begin{cases} xy(x+y)=20 \\ 5(x+y)+2xy=33 \end{cases}.$$

Обозначив $x+y=a$, $xy=b$, получим

$$\begin{cases} ab=20 \\ 5a+2b=33 \end{cases}. \qquad (6)$$

Система (6) легко решается подстановкой a или b из второго уравнения в первое. В результате находим два решения:

$$\begin{cases} a_1=5 \\ b_1=4 \end{cases}; \qquad \begin{cases} a_2=1{,}6 \\ b_2=12{,}5 \end{cases}.$$

Вспоминая, что $a=x+y$ и $b=xy$, получаем две системы:

$$\begin{cases} x+y=5 \\ xy=4 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x+y=1{,}6 \\ xy=12{,}6 \end{cases}.$$

Первая система имеет два решения $\begin{cases} x_1=1 \\ y_1=4 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2=4 \\ y_2=1 \end{cases}$. Вторая система решений не имеет.

Ответ: $\{(1;4),(4;1)\}$.

Задача 6. Решить систему

$$\begin{cases} x^2+y^2=68 \\ x+\sqrt{xy}+y=14 \end{cases}. \qquad (7)$$

Решение. Воспользовавшись стандартным преобразованием

$$x^2+y^2=x^2+y^2+2xy-2xy=(x+y)^2-2xy,$$

запишем систему (7) в виде:

$$\begin{cases} (x+y)^2-2xy=68 \\ x+y+\sqrt{xy}=14 \end{cases}.$$

Заменяя теперь $x+y=a$, $\sqrt{xy}=b$, получаем

$$\begin{cases} a^2-2b^2=68 \\ a+b=14 \end{cases}.$$

Подставив $a=14-b$ в первое уравнение, мы найдем решения этой системы

$$\begin{cases} a_1 = 10 \\ b_1 = 4 \end{cases}; \qquad \begin{cases} a_2 = 46 \\ b_2 = -32 \end{cases}.$$

Возвращаясь к переменным x и y, имеем:

$$\begin{cases} x + y = 10 \\ \sqrt{xy} = 4 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x + y = 46 \\ \sqrt{xy} = -32 \end{cases}.$$

Возводя равенство $\sqrt{xy} = 4$ в квадрат, получаем равносильную систему $\begin{cases} x + y = 10 \\ xy = 16 \end{cases}$. Она имеет два решения $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 8 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 8 \\ y_2 = 2 \end{cases}$.

Вторая система решений не имеет, т. к. равенство $\sqrt{xy} = -32$ не выполняется ни при каких x и y.

Ответ: $\{(2; 8), (8; 2)\}$.

Задача 7. Решить систему

$$\begin{cases} 2x + 3\sqrt{2x + 5y} + 5y = 18 \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}.$$

Решение. В этой системе мы заменим только одно выражение $a = \sqrt{2x + 5y}$. Тогда первое уравнение можно записать в виде

$$a^2 + 3a = 18.$$

Корни этого уравнения $a_1 = -6$, $a_2 = 3$. Учитывая, что равенство $\sqrt{2x+5y} = -6$ не выполняется ни при каких x и y, нам подходит только $a_2 = 3$.

Итак, имеем систему

$$\begin{cases} \sqrt{2x + 5y} = 3 \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 5y = 9 \\ x^2 + 2y^2 = 6 \end{cases}.$$

Последняя система решается подстановкой x или y из первого уравнения во второе. (Проделайте это самостоятельно!) В результате находим два решения $\begin{cases} x_1 = 2 \\ y_1 = 1 \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = \dfrac{2}{11} \\ y_2 = \dfrac{19}{11} \end{cases}$.

Ответ: $\{(2;\,1),\,(\frac{2}{11};\frac{19}{11})\}$.

3. Однородные системы

Однородными системами двух уравнений с двумя неизвестными будем называть системы вида

$$\begin{cases} a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 = d_1 \\ a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 = d_2 \end{cases}. \tag{8}$$

Примеры:

$$\begin{cases} 2x^2 - 6xy + 5y^2 = 8 \\ 3x^2 - 4xy - y^2 = 3 \end{cases}; \tag{9}$$

$$\begin{cases} 2x^2 + 3xy = 4 \\ 5y^2 - 7y^2 = 1 \end{cases}. \tag{10}$$

Хотя в системе (10) в первом уравнении нет члена с y^2, а во втором уравнении нет члена с xy (соответствующие коэффициенты равны нулю), но и (9) и (10) – однородные системы.

Для однородных систем существует стандартный путь решения. Разберем его на конкретных примерах. Рассмотрим сначала систему (8), в которой свободный член d_1 или d_2 равен 0.

Задача 8. Решить систему

$$\begin{cases} 4x^2 - 5xy - 6y^2 = 0 \\ 16x^2 - 12xy - 15y^2 = 25 \end{cases}. \tag{11}$$

Решение. Покажем сначала, что $y \neq 0$. То есть покажем, что система (11) не имеет решений, у которых значение $y = 0$. Действительно, если $y = 0$, то подставив это значение в первое уравнение системы, получаем $x = 0$. Но пара $x = 0$, $y = 0$ не удовлетворяет второму уравнению.

Итак, $y \neq 0$. Разделив обе части первого уравнения на y^2, получим

$$4(\frac{x}{y})^2 - 5(\frac{x}{y}) - 6 = 0 .$$

Обозначив $\frac{x}{y} = t$, получаем квадратное относительно t уравнение $4t^2 - 5t - 6 = 0$. Его корни $t_1 = 2$, $t_2 = -\frac{3}{4}$. Итак, возможны два варианта:

$\frac{x}{y}=2$ и $\frac{x}{y}=-\frac{3}{4}$. Учитывая теперь второе уравнение системы (11), приходим к двум системам:

$$\text{I.}\ \begin{cases}\frac{x}{y}=2\\ 16x^2-12xy-15y^2=25\end{cases}; \qquad \text{II.}\ \begin{cases}\frac{x}{y}=-\frac{3}{4}\\ 16x^2-12xy-15y^2=25\end{cases}.$$

Совокупность систем I и II равносильна исходной системе.

Решив первую систему, получим два решения $(2;\ 1)$ и $(-2;\ -1)$. Вторая система дает еще два решения $(5\sqrt{3};-\frac{5\sqrt{3}}{3})$, $(-\frac{5\sqrt{3}}{3};5\sqrt{3})$.

Ответ: $\{(2;\ 1), (-2;\ -1), (\frac{5\sqrt{3}}{4};-\frac{5\sqrt{3}}{3}), (-\frac{5\sqrt{3}}{4};\frac{5\sqrt{3}}{3})\}$.

Задача 9. Решить систему

$$\begin{cases}7x^2-6xy-25y^2=15\\ 2x^2+xy-10y^2=20\end{cases}.$$

Решение. Правые части обоих уравнений данной системы отличны от 0, поэтому сразу деление на y^2 не даст эффекта. После деления на y^2 обеих частей первого уравнения мы получим в правой части $\frac{15}{y^2}$, и замена $t=\frac{x}{y}$ ни к чему не приведет. Аналогичная картина будет при делении на y^2 и во втором уравнении. Поэтому прежде, чем делить, надо «освободиться» от свободного члена, т. е. сделать его равным 0. Для этого умножим первое уравнение на 4, а второе на (-3) и сложим их

$$\begin{cases}7x^2-6xy-25y^2=15\\ 2x^2+xy-10y^2=20\end{cases}\left|\begin{matrix}4\\-3\end{matrix}\right| + \begin{cases}28x^2-24xy-100y^2=60\\ -6x^2-3xy+30y^2=-60\end{cases}, \text{ получим}$$

$$22x^2-27xy-70y^2=0.$$

Это первое уравнение новой системы. В качестве второго уравнения возьмем любое из уравнений исходной системы. Имеем

$$\begin{cases}22x^2-27xy-70y^2=0\\ 2x^2+xy-100y^2=20\end{cases}. \qquad (12)$$

Полученная система (12) равносильна исходной, но в ней уже свободный член в первом уравнении равен нулю. Она аналогична системе (11) из предыдущей задачи. Разделив первое уравнение на y^2 (предварительно рассмотрев случай $y = 0$ и показав, что $y = 0$ не является решением системы (12)), мы после замены $t = \frac{x}{y}$, приходим к квадратному уравнению

$$22t^2 - 27t - 70 = 0,$$

корни которого $t_1 = \frac{5}{2}$, $t_2 = -\frac{14}{11}$.

Таким образом, имеем две системы:

$$\begin{cases} \frac{x}{y} = \frac{5}{2} \\ 2x^2 + xy - 10y^2 = 20 \end{cases}; \qquad \begin{cases} \frac{x}{y} = -\frac{14}{11} \\ 2x^2 + xy - 10y^2 = 20 \end{cases}.$$

В первой системе $x = \frac{5}{2}y$. Подставляя это значение x во второе уравнение, находим два решения:

$$\begin{cases} x_1 = 5 \\ y_1 = 2 \end{cases}; \qquad \begin{cases} x_2 = -5 \\ y_2 = -2 \end{cases}.$$

Во второй системе $x = -\frac{14}{11}y$. Подставляя его во второе уравнение, приходим к квадратному уравнению, которое не имеет решений.

Ответ: $\{(5; 2), (-5; -2)\}$.

4. Разложение на множители

Задача 10. Решить систему

$$\begin{cases} x^2 + y = 20 \\ x + y^2 = 20 \end{cases}. \tag{13}$$

Решение. Вычтем из первого уравнения второе. Имеем

$$x^2 - y^2 + y - x = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y) - (x-y) = 0 \Leftrightarrow (x-y)(x+y-1) = 0.$$

Из последнего равенства следует либо $x - y = 0$, либо $x + y - 1 = 0$. Добавив любое из уравнений системы (13) (например, первое), получим две системы:

I. $\begin{cases} x-y=0 \\ x^2+y=20 \end{cases}$; II. $\begin{cases} x+y-1=0 \\ x^2+y=20 \end{cases}$.

Совокупность этих двух систем равносильна исходной системе. Решив каждую из них методом подстановки, получим

Ответ: $\{(4;4), (-5;-5), (\frac{1+\sqrt{77}}{2}; \frac{1-\sqrt{77}}{2}), (\frac{1-\sqrt{77}}{2}; \frac{1+\sqrt{77}}{2})\}$.

Задача 11. Решить систему

$$\begin{cases} x^3+y^3=7 \\ xy(x+y)=-2 \end{cases}. \qquad (14)$$

Мы решим эту систему тремя способами.

Решение. <u>I-й способ</u>. Разделим первое уравнение системы на второе (из второго уравнения следует, что $x+y$ и xy не равны 0).

Имеем

$$\frac{(x+y)(x^2-xy+y^2)}{xy(x+y)} = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{x^2-xy+y^2}{xy} = -\frac{7}{2} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x}-1=-\frac{7}{2} \Leftrightarrow \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=-\frac{5}{2} \qquad (15)$$

Обозначим $t=\frac{x}{y}$. Тогда уравнение (15) можно записать в виде $t+\frac{1}{t}=-\frac{5}{2}$. Корни этого уравнения $t_1=-2$, $t_2=-\frac{1}{2}$. Следовательно, исходная система равносильна совокупности двух систем:

I. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=-2 \\ x^3+y^3=7 \end{cases}$; II. $\begin{cases} \dfrac{x}{y}=-\dfrac{1}{2} \\ x^3+y^3=7 \end{cases}$.

Решим первую систему. Подставляя $x=-2y$ во второе уравнение, находим ее решение $x=2$, $y=-1$. Аналогично, решая вторую систему, находим еще одно решение $x=-1$, $y=2$.

Ответ: $\{(2;-1), (-1;2)\}$.

<u>II-й способ</u>. Умножим второе уравнение системы на 3 и сложим с первым. Имеем

$$x^3+y^3+3x^2y+3xy^2=1 \quad \text{или} \quad (x+y)^3=1\,.$$

Откуда получаем $x+y=1$. Таким образом, исходная система равносильна следующей

$$\begin{cases} x+y=1 \\ x^3+y^3=7 \end{cases}. \tag{16}$$

Подставляя $x=1-y$ во второе уравнение системы (16), легко находим ее решения.

III-й способ. Разложим первое уравнение на множители $(x+y)(x^2-xy+y^2)=7$. Обозначим $x+y=a, xy=b$. Тогда, учитывая, что $x^2+y^2=(x+y)^2-2xy$, получаем:

$$\begin{cases} a(a^2-3b)=7 \\ ab=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^3-3ab=7 \\ ab=-2 \end{cases}. \tag{17}$$

Подставив $ab=-2$ в первое уравнение (17), находим $a=1$. Теперь из равенства $ab=-2$ следует $b=-2$. Вспоминая наши обозначения $a=x+y, b=xy$, имеем систему

$$\begin{cases} x+y=1 \\ xy=-2 \end{cases}.$$

Решив последнюю систему, получим ответ.

Как показывает этот пример, не надо думать, будто каждая система решается каким-то своим определенным методом, «прикрепленным» к этой системе, и этот метод вместе с системой надо выучить. Это не так. Многие системы можно решить разными способами. Поэтому при решении систем уравнений есть большая свобода для творчества.

Подведем итоги. Мы рассмотрели четыре стандартных метода решения нелинейных систем. Первый способ – это метод подстановки. Суть его состоит в нахождении какого-то из неизвестных из одного уравнения и подстановки его в другое уравнение. Очень часто сразу, а иногда после громоздких выкладок, мы приходим к квадратному уравнению. Так было в задачах 1–3.

Второй способ – это введение новых неизвестных. В задачах (4)–(7) мы видели, что после введения новых неизвестных мы получили системы, которые легко решались. После этого мы возвращались к исходным переменным.

Третий метод, который мы разобрали – это решение однородных систем.

И, наконец, четвертый метод – это разложение на множители. В системе (10) после вычитания из первого уравнения второе, левая часть полученного уравнения легко разложилась на множители.

Большинство систем, которые предлагаются на экзаменах, решаются одним или даже несколькими из рассмотренных выше методов. И только для решения наиболее трудных систем нужны собственные специфические методы. Я советую прежде, чем переходить к задачам с параметрами, решить задачи 1–13 для самостоятельного решения.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Решить системы:

1. $\begin{cases} 5x+3y=-4 \\ 7x-8y=92 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} 2x+3y+z=2 \\ 3x+y+2z=7 \\ x+2y+3z=3 \end{cases}$;

3. $\begin{cases} x^2+y^2+6x+2y=0 \\ x+y+8=0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x^4+y^4=82 \\ xy=3 \end{cases}$;

5. $\begin{cases} x+y+\dfrac{x^2}{y^2}=7 \\ \dfrac{(x+y)x^2}{y^2}=12 \end{cases}$;

6. $\begin{cases} \dfrac{2}{x}+\dfrac{y}{3}=3 \\ \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2} \end{cases}$;

7. $\begin{cases} \dfrac{x^2+y^2}{x+y}=\dfrac{10}{3} \\ \dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{4} \end{cases}$;

8. $\begin{cases} \dfrac{x}{2}+\dfrac{3}{y}=\dfrac{3}{2} \\ \sqrt{5x+y}+\sqrt{5x-y}=4 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} x^2y^3+x^3y^2=12 \\ x^2y^3-x^3y^2=4 \end{cases}$;

10. $\begin{cases} x^2+2y+\sqrt{x^2+2y+1}=1 \\ 2x+y=2 \end{cases}$;

11. $\begin{cases} x^2+y^2=34 \\ x+y+xy=23 \end{cases}$;

12. $\begin{cases} 7x^2-6xy-25y^2=15 \\ 2x^2+xy-10y^2=20 \end{cases}$;

13. $\begin{cases} x^2+2y^2=17 \\ x^2-2xy=-3 \end{cases}$;

§ 2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРАМИ

Те же методы, которые мы применяли при решении нелинейных систем без параметров, применяются и при решении систем с параметрами. Рассмотрим примеры.

Задача 12. При всех a определить число решений системы

$$\begin{cases} 2x+3y=2a+4 \\ xy=2a^2-5a-6 \end{cases}. \tag{18}$$

Решение. Из первого уравнения найдем x. Имеем:

$$2x=2a+4-3y, \qquad x=\frac{2a+4-3y}{2}.$$

Подставив это выражение для x во второе уравнение, после несложных преобразований (проведите их самостоятельно) приходим к квадратному уравнению:

$$3y^2-(2a+4)y+4a^2-10a-12=0. \tag{19}$$

Число решений этого уравнения и будет определять число решений исходной системы. Итак, задача свелась к исследованию числа решений квадратного уравнения (19). Найдем его дискриминант

$$\mathrm{D}=(2a+4)^2-4\cdot3\cdot(4a^2-10a-12)=-44a^2+136a+160.$$

1. Если $\mathrm{D}<0 \Leftrightarrow -44a^2+136a+160<0 \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow a\in(-\infty;-\frac{10}{11})\cup(4;+\infty)$, то уравнение (19), а следовательно, и исходная система решений не имеют.

2. Если $\mathrm{D}=0 \Leftrightarrow -44a^2+136a+160=0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} a_1=4 \\ a_2=-\frac{10}{11} \end{array}\right.$, то уравнение (19) и исходная система имеют одно решение.

3. Если $\mathrm{D}>0 \Leftrightarrow -44a^2+136a+160>0 \Leftrightarrow a\in(-\frac{10}{11};4)$, то уравнение (19), а следовательно, и исходная система имеют два решения.

Ответ:

при $a \in (-\infty; -\frac{10}{11}) \cup (4; +\infty)$ решений нет;

при $a = -\frac{10}{11}$ и $a = 4$ система имеет одно решение;

при $a \in (-\frac{10}{11}; 4)$ система имеет два решения.

Задача 13. При каких a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 3a + 2 \\ xy = 6 - a \end{cases} \qquad (20)$$

имеет два решения?

Решение. В этой системе выразим y из второго уравнения и подставим в первое. Но прежде, чем записать $y = \frac{6-a}{x}$, рассмотрим случай $x = 0$.

При $x = 0$ второе уравнение системы принимает вид:

$$0 \cdot y = 6 - a.$$

Чтобы оно имело решения, должно быть $6 - a = 0$, т. е. $a = 6$. Подставив $a = 6$ в систему, получим

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 14 \\ xy = 0 \end{cases}. \qquad (21)$$

Из второго уравнения сразу следует, либо $x = 0$, либо $y = 0$.

При $x = 0$ из первого уравнения получаем $y^2 = 14$. Откуда $y_1 = \sqrt{14}$, $y_2 = -\sqrt{14}$. Таким образом, два решения $\begin{cases} x_1 = 0 \\ y_1 = \sqrt{14} \end{cases}$ и $\begin{cases} x_2 = 0 \\ y_2 = -\sqrt{14} \end{cases}$ системы (21) мы уже нашли.

В случае $y = 0$, аналогично, находим еще два решения:

$$\begin{cases} x_3 = \sqrt{14} \\ y_3 = 0 \end{cases} \text{ и } \begin{cases} y_3 = 0 \\ y_4 = 0 \end{cases}.$$

Итак, при $a = 6$ система имеет четыре решения. Следовательно, это значение a не удовлетворяет условию задачи.

Если $a \neq 6$, то из второго уравнения системы (20) следует, что ни x, ни y не равны 0, и мы можем записать

$$y = \frac{6-a}{x}. \tag{22}$$

Подставив (22) в первое уравнение, получаем

$$x^2 + (\frac{6-a}{x})^2 = 3a + 2. \tag{23}$$

После несложных преобразований уравнение (23) приводится к биквадратному

$$x^4 - (3a+2)x^2 + (6-a)^2 = 0. \tag{24}$$

Ясно, что система (20) будет иметь два решения в том и только в том случае, когда два решения будет иметь биквадратное уравнение (24). Обозначив $x^2 = t$, сведем его к квадратному

$$t^2 - (3a+2)t + (6-a)^2 = 0. \tag{25}$$

Возникает вопрос, какими должны быть корни t_1 и t_2 квадратного уравнения (25), чтобы биквадратное уравнение (24) имело два корня?

Нетрудно понять, поскольку уравнение $x^2 = t$ при $t > 0$ имеет два решения $x_1 = \sqrt{t}$, $x_2 = -\sqrt{t}$; при $t = 0$ – одно решение $x = 0$; при $t < 0$ не имеет решений, то биквадратное уравнение (24) имеет два корня в следующих двух случаях.

1. Когда квадратное уравнение (25) имеет один корень и этот корень положительный, т. е. $t_1 = t_2 > 0$.

2. Когда квадратное уравнение (25) имеет один положительный корень, другой отрицательный, т. е. $t_1 < 0$, $t_2 > 0$.

Первый случай имеет место, когда дискриминант $\mathrm{D} = 0$. Имеем

$$\mathrm{D} = (3a+2)^2 - 4(6-a)^2 = 5a^2 + 60a - 140 = 0.$$

Решая последнее уравнение, находим $a_1 = 2$, $a_2 = -14$.

Теперь надо проверить, будет ли при найденных значениях a этот единственный корень t положительным. Подставив $a = 2$ в квадратное уравнение (25), получаем

$$t^2 - 8t + 16 = 0.$$

Решив это уравнение, находим $t = 4 > 0$.

При $a = -14$ уравнение (25) имеет вид

$$t^2 + 40t + 400 = 0.$$

Его единственный корень $t = -20 < 0$. Таким образом, задаче удовлетворяет только $a = 2$.

Рассмотрим второй случай, $t_1 < 0$, $t_2 > 0$. Обозначим

$$f(t) = t^2 - (3a+2)t + (6-a)^2 .$$

Тогда квадратное уравнение (25) будет иметь корни разных знаков, если $f(0) < 0$. Имеем

$$f(0) = 0^2 - (3a+2)\cdot 0 + (6-a)^2 < 0 \Leftrightarrow (6-a)^2 < 0 .$$

Последнее неравенство решений не имеет.

Ответ: $a = 2$.

Заметим, что эту задачу можно было решить, основываясь на совсем других соображениях, связанных с симметрией алгебраических выражений, входящих в это уравнение. Подробно эти вопросы мы рассмотрим во второй части этой книги.

Задача 14. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} 2axy + 2x - 2y = -3 \\ x + xy + 2y = -1 \end{cases}$$

имеет одно решение?

Решение. Перепишем второе уравнение системы в виде:

$$y(x+2) = -x - 1 .$$

Так как $x = -2$ не удовлетворяет ему, то разделив обе его части на $x + 2$, получим равносильное уравнение

$$y = \frac{-x-1}{x+2} . \tag{26}$$

Подставим (26) в первое уравнение исходной системы. После несложных преобразований получаем систему, равносильную исходной

$$\begin{cases} (2-2a)x^2 + (9-2a)x + 8 = 0 & \text{(а)} \\ y = \dfrac{-x-1}{x+2} & \text{(б)} \end{cases} . \tag{27}$$

Система (27) может иметь одно решение в трех случаях:

1. Когда $2 - 2a = 0$. Тогда уравнение (27а) – линейное.
2. Когда $2 - 2a \neq 0$, а дискриминант квадратного уравнения (27а) равен 0.

3. Когда уравнение (27а) имеет два корня, но один из корней равен (–2). (В этом случае система (27) имеет только одно решение. Дело в том, что для каждого решения x уравнения (27а) значение y находится по формуле (27б), а при $x = -2$ значение y не существует).

Рассмотрим эти три случая подробно.

1. Если $2 - 2a = 0$, т. е. $a = 1$, то уравнение (27a) имеет вид:

$$0 \cdot x^2 + 7x + 8 = 0 \Leftrightarrow 7x + 8 = 0.$$

Его единственный корень $x = -\frac{8}{7}$. Соответствующее ему значение $y = \dfrac{\frac{4}{3} - 1}{-\frac{4}{3} + 2} = \frac{1}{2}$. Пара $\begin{cases} x = -\frac{8}{7} \\ y = \frac{1}{6} \end{cases}$ – единственное решение системы (27) при $a = 1$. Следовательно, $a = 1$ удовлетворяет условиям задачи.

2. Найдем дискриминант уравнения (27а) и приравняем его нулю. Имеем $\mathrm{D} = (9 - 2a)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (2 - 2a) = 4a^2 + 28a + 17$, $\mathrm{D} = 0 \Leftrightarrow 4a^2 + 28a + 17 = 0$.

Отсюда находим $a_{1,2} = \dfrac{-7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$. Эти значения a также удовлетворяют условию задачи, поскольку, как нетрудно проверить, при них система имеет одно решение.

3. Подставив $x = -2$ в уравнение (27а), найдем a, при которых один из его корней равен (–2). Имеем

$$(2 - 2a)(-2)^2 + (9 - 2a)(-2) + 8 = 0 \Leftrightarrow \Leftrightarrow 4a + 2 = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{1}{2}.$$

Теперь осталось определить, имеет ли еще какие-то корни уравнение (27а) при $a = -\frac{1}{2}$. Подставив $a = -\frac{1}{2}$ в уравнение (27а), получим квадратное уравнение $3x^2 + 10x + 8 = 0$. Его корни $x_1 = -\frac{4}{3}$, $x_2 = -2$. Значение y_1, соответствующее значению $x_1 = -\frac{4}{3}$, равно: $y_1 = \dfrac{\frac{4}{3} - 1}{-\frac{4}{3} + 2} = \frac{1}{2}$. А значение y_2, соответствующее значению $x_2 = -2$, не существует. Следовательно, при $a = -\frac{1}{2}$ система (27) имеет также одно решение.

Ответ: $a_1 = 1,\ a_2 = -\frac{1}{2},\ a_{3,4} = \frac{7 \pm 4\sqrt{2}}{2}$.

Задача 15. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} ax^2 + y^2 + 3x - 3y \geq 6 - 2a & (а) \\ x + y = -1 & (б) \end{cases} \qquad (28)$$

имеет единственное решение.

Решение. До сих пор мы рассматривали системы, состоящие только из уравнений. Данная система – смешанная. Она состоит из уравнения и неравенства. Тем не менее, исследование этой системы аналогично исследованию систем, состоящих только из уравнений.

Из уравнения (28б) находим $y = -x - 1$. Подставив это значение y в неравенство (28а), после несложных преобразований получим

$$(a+1)x^2 + 8x + 2a - 2 \geq 0. \qquad (29)$$

Система (28) будет иметь одно решение в том и только в том случае, когда будет иметь одно решение неравенство (29).

При $a \neq -1$ – это квадратное неравенство. (Случай $a = -1$ не удовлетворяет условиям задачи. Обоснуйте, почему!). Обозначим $f(x) = (a+1)x^2 + {}$ $+ 8x + a - 2$. Тогда неравенство (29) будет иметь одно решение, когда парабола $f(x)$ будет касаться оси Ox и ветви ее будут направлены вниз (рис. 1).

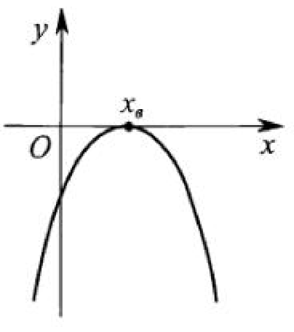


Рис. 1

А это будет, если выполняются условия:

$$\begin{cases} a+1<0 \\ \mathrm{D}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a+1<0 \\ \mathrm{D} = 8^2 - 4(a+1)(2a-2) = 0 \end{cases}.$$

Решив уравнение $\mathrm{D} = 0$, находим $a_1 = 3$, $a_2 = -3$. Но условию $a + 1 < 0$ удовлетворяет только $a_2 = -3$.

Ответ: $a=-3$.

Задача 16.

При каких a и b система

$$\begin{cases} 4x^2-9y^2+a(2x+3y)=2x-3y+a \\ 4x^2+9y^2+6bxy=1 \end{cases} \tag{30}$$

имеет не менее пяти решений.

Решение. Перенесем все члены первого уравнения системы (30) в левую часть и разложим ее на множители. Имеем

$$(2x-3y)(2x+3y)+a(2x+3y)-(2x-3y+a)=0$$

или

$$(2x-3y+a)(2x+3y-1)=0\,. \tag{31}$$

Теперь, с учётом второго уравнения, исходная система равносильна совокупности следующих двух систем:

$$\text{I. } \begin{cases} 2x+3y-1=0 \\ 4x^2+9y^2+6bxy=1 \end{cases}; \qquad \text{II. } \begin{cases} 2x-3y+a=0 \\ 4x^2+9y^2+6bxy=1 \end{cases}.$$

Проанализируем каждую из них. Если в системе I из первого уравнения выразить $y=\dfrac{1-2x}{3}$ и подставить во второе, мы придем к уравнению не выше второй степени. При этом, если коэффициент при x^2 в этом уравнении будет отличен от 0, оно будет квадратным и иметь не более двух решений.

Если же коэффициент при x^2 равен 0, то полученное уравнение будет линейным и оно может иметь либо один корень, либо бесконечное число корней, либо вообще не иметь корней.

Следовательно, в любом случае система I может иметь либо одно, либо два, либо бесконечное число решений, либо не иметь решений.

Аналогично показывается, что система II также может иметь либо одно, либо два, либо бесконечное множество решений, либо не иметь решений. Поэтому исходная система будет иметь не менее пяти решений тогда и только тогда, когда одна из систем I или II имеет бесконечное число решений.

Реализуем сказанное. Итак, из первого уравнения системы I находим $y=\dfrac{1-2x}{3}$. Подставляя это выражение во второе уравнение, получим

$$(8-4b)x^2+(2b-4)x=0\,. \tag{32}$$

Уравнение (32) от a не зависит. При $b = 2$ оно имеет бесконечное число решений, при остальных b – не более двух решений.

Итак, система I имеет бесконечное число решений при любом $a \in R$ и $b = 2$. Аналогично, в системе II из первого уравнения находим $y = \dfrac{2x+a}{3}$. Подставив это значение y во второе, приходим к уравнению

$$(4b+8)x^2 + (2ab+4a)x + a^2 - 1 = 0.$$

Последнее уравнение имеет бесконечное число решений если

$$\begin{cases} 4b+8=0 \\ 2ab+4a=0 \\ a^2-1=0 \end{cases}.$$

Из первого уравнения находим $b = -2$, из третьего $a = \pm 1$. Обе пары $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$, $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$ удовлетворяют второму уравнению. Итак, получаем

Ответ: 1) $\begin{cases} a \in R \\ b=2 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} a=1 \\ b=-2 \end{cases}$; 3) $\begin{cases} a=-1 \\ b=-2 \end{cases}$.

Задача 17. Найти все значения a, удовлетворяющие неравенству $-15 \le a \le 0$, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (x+1)(y+1)=25 \\ x^2y+xy^2=-4a^2-64a-112 \end{cases}$$

имеет четыре решения.

Решение. Раскрыв скобки в первом уравнении данной системы, перепишем ее в виде

$$\begin{cases} x+y+xy=24 \\ xy(x+y)=-4a^2-64a-112 \end{cases}. \tag{33}$$

Обозначим $z = x + y$, $t = xy$. Тогда система (33) примет вид:

$$\begin{cases} z+t=24 \\ zt=-4a^2-64a-112 \end{cases}.$$

Последняя система легко решается. Из первого уравнения находим $z = 24 - t$. Подставив это выражение во второе уравнение, после несложных преобразований получаем квадратное уравнение

$$t^2 - 24t - 4a^2 - 64a - 112 = 0. \qquad (34)$$

Его дискриминант

$$\mathrm{D} = 24^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-4a - 64a - 112) = 16a^2 + 256a + 1024 = (4a + 32)^2.$$

Из последнего равенства видно, что дискриминант уравнения (34) является полным квадратом, поэтому его корни будут «хорошими». Имеем

$$t_1 = \frac{24 + (4a + 32)}{2} = 2a + 28, \qquad t_2 = \frac{24 - (4a + 32)}{2} = -2a - 4.$$

Поскольку $z = 24 - t$, то соответствующие значения z_1 и z_2 есть:

$$z_1 = 24 - (2a + 28) = -2a - 4, \qquad z_2 = 24 - (-2a - 4) = 2a + 28.$$

Вспомнив наши обозначения $z = x + y$ и $t = xy$, имеем две системы:

$$\begin{cases} x + y = -2a - 4 \\ xy = 2a + 28 \end{cases}; \qquad (35)$$

$$\begin{cases} x + y = 2a + 28 \\ xy = -2a - 4 \end{cases}. \qquad (36)$$

Итак, исходная система равносильна совокупности двух систем (35) и (36). Очевидно, каждая из этих систем имеет не более двух решений (обоснуйте, почему!), поэтому четыре решения будут только в случае, когда каждая из систем имеет ровно два решения.

Решим первую систему. Подставив $y = -2a - 4 - x$ во второе уравнение, после раскрытия скобок приходим к квадратному уравнению:

$$x^2 + (2a + 4)x + 2a + 28 = 0. \qquad (37)$$

Его дискриминант

$$\mathrm{D} = (2a + 4)^2 - 4(2a + 28) = 4a^2 + 8a - 96 = 4(a - 4)(a + 6).$$

Система (35) будет иметь два решения в том и только в том случае, когда уравнение (37) будет иметь два корня. А это будет, если $\mathrm{D} > 0$. Решением неравенства $\mathrm{D} = 4(a - 4)(a + 6) > 0$ будет множество $(-\infty; -6) \cup (4; +\infty)$. Но, учитывая условие задачи $-15 \le a \le 0$, получаем промежуток $[-15; -6)$.

Итак, первая система имеет два решения при $a \in [-15; -6)$.

Решим систему (36). Из первого уравнения $y = 2a + 28 - x$. Подставляя это выражение во второе уравнение, приходим к квадратному уравнению

$$x^2 - (2a + 28)x - 2a - 4 = 0. \qquad (38)$$

Дискриминант уравнения (38) равен

$$D = (2a+28)^2 - 4(-2a-4) = 4(a+10)(a+20).$$

Система (36) будет иметь два решения, если $D > 0$. Решением неравенства $D > 0$ будет множество $a \in (-\infty; -20) \cup (-10; +\infty)$. Учитывая условие $-15 \le a \le 0$, получаем промежуток $a \in (-10;\ 0]$. Итак, система (36) имеет два решения при $a \in (-10;\ 0]$.

Взяв теперь пересечение промежутков $[-15; -6)$ и $(-10; 0]$ (рис. 2), мы получим промежуток $(-10; -6)$. Этот промежуток есть множество тех значений a, при которых обе системы имеют по два решения. Но утверждать сразу, что при этих a исходная система имеет четыре решения, нельзя. Возможен следующий нюанс: обе системы могут иметь общее решение, и тогда исходная система имеет меньше четырех решений.

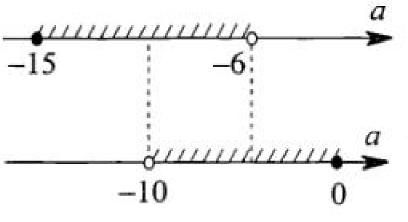


Рис. 2

Рассмотрим этот случай более подробно. Пусть $(x_0;\ y_0)$ – общее решение систем (35) и (36). Согласно первому уравнению системы (35) $x_0+y_0 = -2a-4$, а согласно первому уравнению системы (36) $x_0+y_0 = 2a+28$. Следовательно, обе системы могут иметь общее решение, когда $-2a-4 = 2a+28$, т. е. при $a = -8$. Осталось проверить, действительно ли это так. Подставляя $a = -8$ в системы (35) и (36), получаем одну и ту же систему

$$\begin{cases} x+y=12 \\ xy=12 \end{cases}.$$

Эта система имеет два решения. Таким образом, из множества $(-10; -6)$ надо выкинуть значение $a = -8$.

Ответ: $a \in (-10; -8) \cup (-8; -6)$.

Если еще раз посмотреть на решение задачи 17, то видно, что выкладки в решении достаточно просты и основная логическая трудность – это не пропустить момента, когда обе системы могут иметь общее решение. Пропустив его, вы сразу получите неверный ответ и, следовательно, решение не может быть признано стопроцентно правильным.

Задача 18. При каких значениях a система уравнений

$$\begin{cases} x^2-3xy-4y^2=-2 \\ 2x^2-(a+5,5)xy+(4,5a-8,5)y^2=-3 \end{cases} \tag{39}$$

имеет решения?

Решение. Так же, как это мы делали в однородных системах без параметра, избавимся от свободного члена. Для этого умножим первое уравнение на (-3), второе на 2 и сложим их. Получим

$$x^2-(2a+2)xy+(9a-5)y^2=0.$$

С учетом первого уравнения системы (39) имеем новую систему, равносильную исходной

$$\begin{cases} x^2-3xy-4y^2=-2 \\ x^2-(2a+2)xy+(9a-5)y^2=0 \end{cases}. \tag{40}$$

Значение $y=0$ не является решением системы (40), т. к. в противном случае из первого уравнения следовало бы $x^2=-2$.

Разделив второе уравнение этой системы на y^2, получаем

$$\left(\frac{x}{y}\right)^2-(2a+2)\frac{x}{y}+9a-5=0. \tag{41}$$

Обозначим $\frac{x}{y}=k$. Тогда уравнение (41) примет вид

$$k^2-(2a+2)k+9a-5=0. \tag{42}$$

Оно имеет решения, если его дискриминант $D\ge 0$. Имеем

$$D=(2a+2)^2-4(9a-5)=4a^2-28a+24\ge 0 \Leftrightarrow a\in(-\infty;1]\cup[6;+\infty).$$

При найденных значениях a существует отношение $k=\frac{x}{y}$. Но это не означает, что при этих a система (40) имеет решения. Мы ведь должны еще $x=ky$ подставить в первое уравнение. Система будет иметь решения тогда и только тогда, когда в результате такой подстановки первое уравнение системы (40) будет разрешимо относительно y. Посмотрим, что получится при указанной подстановке. Имеем

$$k^2y^2-3ky^2-4y^2=-2 \Leftrightarrow y^2(k^2-3k-4)=-2.$$

Чтобы последнее равенство выполнялось, должно быть

$$k^2 - 3k - 4 < 0 \Leftrightarrow k \in (-1;4).$$

Итак, система (40) будет иметь решения тогда и только тогда, когда уравнение (42) будет иметь хотя бы один корень в промежутке $(-1;\ 4)$. Рассмотрим три случая.

1. Оба корня k_1 и k_2 лежат в этом промежутке.

Если обозначить $f(k) = k^2 - (2a+2)k + 9a - 5$, то условия того, что оба корня лежат в промежутке $(-1;\ 4)$, будут следующие:

$$\begin{cases} D \ge 0 \\ -1 < k_{вер} < 4 \\ f(-1) > 0 \\ f(4) > 0 \end{cases}.$$ Решениями этой системы будут $a \in (\frac{2}{11}; 1]$.

2. Только больший корень $k_2 \in (-1;4)$, а меньший – не принадлежит. Это будет, если

$$\begin{cases} f(-1) \le 0 \\ f(4) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (-3; \frac{2}{11}].$$

3. Только меньший корень k_1 принадлежит промежутку $(-1;4)$. Это будет, если

$$\begin{cases} f(-1) > 0 \\ f(4) \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in \varnothing.$$

Объединяя результаты, найденные в случаях 1 и 2, получаем

Ответ: $a \in (-3;1]$.

Задача 19. При всех a и b решить систему

$$\begin{cases} x^7 \cdot y^{31} = a \\ x^2 y^9 = b \end{cases}. \qquad (43)$$

Решение. Рассмотрим четыре случая:

1) $a = 0$, $b = 0$. Тогда система (43) имеет вид

$$\begin{cases} x^7 \cdot y^{31} = 0 \\ x^2 y^9 = 0 \end{cases}.$$

Ее решением будут все пары $\begin{cases} x = 0 \\ y \in R \end{cases}$ и $\begin{cases} x \in R \\ y = 0 \end{cases}$.

2) $a = 0,\ b \neq 0$. Тогда система (43) имеет вид

$$\begin{cases} x^7 \cdot y^{31} = 0 \\ x^2 y^9 = b \end{cases}. \tag{44}$$

Эта система не имеет решений. Действительно, из первого уравнения этой системы следует, что либо x, либо y равен 0. Но тогда не выполняется второе уравнение.

3) $a \neq 0,\ b = 0$. Тогда система (43) также не имеет решений.

4) И, наконец, если a и $b \neq 0$, то из системы (43) следует, что ни x, ни y не равны 0. Тогда из первого уравнения легко найти y. Имеем $y^{31} = \dfrac{a}{x^7}$, откуда $y = \sqrt[31]{\dfrac{a}{x^7}}$. Подставляя это значение y во второе уравнение (43), получаем

$$x^2\left(\sqrt[31]{\frac{a}{x^7}}\right)^9 = b \Leftrightarrow x^2\sqrt[31]{\frac{a^9}{x^{63}}} = b.$$

Возводя последнее уравнение в 31-ю степень, получаем равносильное уравнение

$$x^{62}\frac{a^9}{x^{63}} = b^{31} \Leftrightarrow \frac{a^9}{x} = b^{31}.$$

Откуда находим $x = \dfrac{a^9}{b^{31}}$. Подставляя найденное значение x в равенство (44), находим $y = \dfrac{b^7}{a^2}$.

Ответ:

при $a = 0, b = 0$ решениями будут все пары $\begin{cases} x = 0 \\ y \in R \end{cases}, \begin{cases} x \in R \\ y = 0 \end{cases}$;

при $a = 0, b \neq 0$ решений нет;

при $a \neq 0, b = 0$ решений нет;

при $a \neq 0, b \neq 0$ решениями являются пары $x = \dfrac{a^9}{b^{31}},\ y = \dfrac{b^7}{a^2}$.

Задача 20. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^2 - 2x - y = 0 \\ x^2 + y^2 = 2x + 2ay - a^2 \end{cases}$$

имеет решения.

Решение. Поскольку

$$x^2-2x=x^2-2x+1-1=(x-1)^2-1 \quad \text{и} \quad y^2-2ay+a^2=(y-a)^2,$$

то нашу систему можно записать так:

$$\begin{cases}(x-1)^2=y+1\\(y-a)^2+(x-1)^2=1\end{cases}. \tag{45}$$

Из первого уравнения следует, что $y+1\ge 0$. Заменяя теперь во втором уравнении $(x-1)^2$ на $y+1$, получаем систему, равносильную исходной

$$\begin{cases}(y-a)^2+(y+1)=1\\y+1\ge 0\\y+1=(x-1)\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}y^2+(1-2a)y+a^2=0\\y\ge -1\\y+1=(x-1)^2\end{cases}. \tag{46}$$

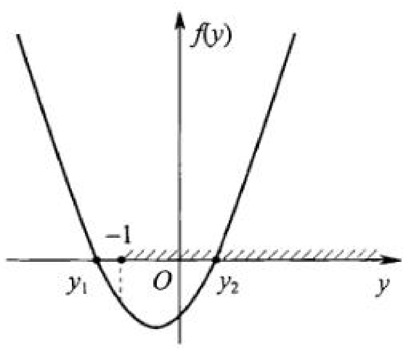


Рис. 3

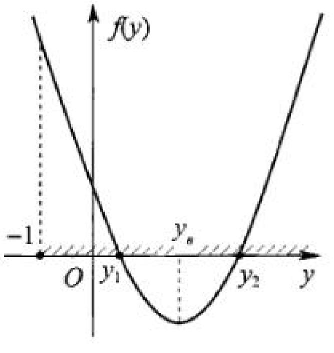


Рис. 4

Итак, наша задача свелась к нахождению значений параметра a, при которых система (46) имеет хотя бы одно решение. А это будет в том и только в том случае, когда первое уравнение этой системы имеет хотя бы один корень, удовлетворяющий неравенству $y\ge -1$.

Рассмотрим отдельно два случая.

1. Один корень этого уравнения удовлетворяет неравенству $y\ge -1$.
2. Оба корня y_1 и y_2 удовлетворяют неравенству $y\ge -1$.

Обозначим $f(y)=y^2+(1-2a)y+a^2$. Тогда первый случай будет иметь место, если $f(-1)\le 0$ (рис. 3).

Решая неравенство $f(-1)=(-1)^2+(1-2a)(-1)+a^2\le 0$, находим множество решений $a\in[-2;0]$.

Второй случай будет иметь место, если (рис. 4)

$$\begin{cases} D \geq 0 \\ y_в \geq -1 \\ f(-1) \geq 0 \end{cases}$$. Решением этого неравенства будут $a \in [0; \frac{1}{4}]$.

Объединяя найденные множества, получаем

Ответ: $a \in [-2; \frac{1}{4}]$.

Задача 21. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z = 0 \\ x + y + z = a \end{cases}$$

имеет единственное решение? Найти это решение.

Исходная система состоит из двух уравнений с тремя неизвестными. Системы, в которых число уравнений меньше числа неизвестных, называются неопределенными. Обычно неопределенная система имеет бесконечное число решений, но при определенных коэффициентах она может иметь конечное число или даже не иметь решений.

Решение. Из второго уравнения $z = a - x - y$. Подставив это значение z в первое уравнение, получим

$$x^2 + x + y^2 + y = a. \qquad (47)$$

Выделим полный квадрат в выражениях $x^2 + x$ и $y^2 + y$. Имеем

$$x^2 + x = x^2 + x + \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = (x + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Аналогично

$$y^2 + y = (y + \frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4}.$$

Подставляя эти выражения в уравнение (47), получим

$$(x + \frac{1}{2})^2 + (y + \frac{1}{2})^2 = a + \frac{1}{2}. \qquad (48)$$

Исходная система будет иметь одно решение в том и только в том случае, когда одно решение будет иметь уравнение (48).

Рассмотрим три случая.

1. Если $a + \frac{1}{2} < 0$, тогда уравнение (48) не имеет решений.

2. Если $a+\frac{1}{2}>0$, тогда уравнение (48) имеет бесконечное число решений.

3. Если $a+\frac{1}{2}=0$, т. е. $a=-\frac{1}{2}$, то уравнение (48) имеет вид:

$$(x+\frac{1}{2})^2+(y+\frac{1}{2})^2=0.$$

Его единственным решением будет пара $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$. Вспоминая, что $z=a-x-y$, находим $z=\frac{1}{2}$.

Ответ: при $a=-\frac{1}{2}$ решение $x=-\frac{1}{2}$, $y=-\frac{1}{2}$, $z=\frac{1}{2}$.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. При всех a решить систему $\begin{cases} x+y=a-2 \\ 3xy+3y=a^2+3 \end{cases}$.

При каких значениях a следующие системы имеют решения:

2. $\begin{cases} y-x^2=-2x \\ 4x^2+4y^2+a^2=8x+4ay \end{cases}$;

3. $\begin{cases} y(ax+3)+x-a(y+1)=0 \\ |x+4|-xy+y=0 \end{cases}$;

4. $\begin{cases} x^2-y+1=0 \\ x^2-y^2+(a+1)x+(a-1)y+a=0 \end{cases}$.

5. При всех значениях a и b решить систему уравнений $\begin{cases} x^5y^8=a \\ x^7y^{11}=b \end{cases}$.

6. При всех a решить систему $\begin{cases} x^2=(x-a)y \\ y^2-xy=9ax \end{cases}$.

7. При каких значениях параметра a существует только одно значение x, удовлетворяющее системе уравнений

$$\begin{cases} |x^2-5x+4|-9x^2-5x+4+10x|x|=0 \\ x^2-2(a-1)x+a(a-2)=0 \end{cases}.$$

Найти все значения a, при которых следующие системы имеют решения:

8. $\begin{cases} y(ax+1)+13x-a(1+y)=0 \\ x-xy+|2+y|=0 \end{cases}$;

9. $\begin{cases} y(ax-1)=2|x+1|+2xy \\ yx+1=x-y \end{cases}$;

10. $\begin{cases} y=x^2+1 \\ y^2-x^2-ay-ax+\dfrac{y}{a}-\dfrac{x}{a}-1=0 \end{cases}$.

11. Найти все значения a, при каждом из которых существует единственная тройка чисел (x, y, z), удовлетворяющая системе

$$\begin{cases} x+y+z=x^2+4y^2 \\ x+2y+3z=a \end{cases}.$$

При найденных значениях a указать эти решения.

12. Найти все целые значения m, при которых система уравнений

$\begin{cases} x(x+2y-4)+4m^2=8+4y-y^2 \\ y^2-2y+2=4x(y-x-1)+2(m^2+m) \end{cases}$ имеет решения.

При найденных целых значениях m найти все решения этой системы.

13. Числа x, y, a таковы, что $\begin{cases} x+y=a-1 \\ x^2+y^2=5a^2-3a+0,5 \end{cases}$.

При каком a произведение xy принимает наибóльшее значение?

БОЛЕЕ ТРУДНЫЕ ЗАДАЧИ

14. При каких целых значениях параметра a система

$\begin{cases} 6x^2+24y(x+y)+2(3a-2)x+4(3a-2)y+3=0 \\ 4(x^2+y^2)+(4a+2)y+2a^2=8xy+(4a+2)x+\frac{5}{2} \end{cases}$ имеет решения?

15. При каких значениях параметра a система

$$\begin{cases} x^3 + x^2 y + 2ay + 2a^2 y = 0 \\ x + \dfrac{x^2}{y} + y = a - 1 \end{cases}$$ имеет решения?

16. При каких значениях параметров a и b система

$$\begin{cases} bx(2x - y) + (y-1)(2x-y) = bx + y - 1 \\ 4x^2 + y^2 + axy = 1 \end{cases}$$

имеет не менее пяти решений?

17. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases} ax^2 + 4ax - y + 7a + 1 = 0 \\ ay^2 - x - 2ay + 4a - 2 = 0 \end{cases}$$ имеет единственное решение?

18. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 - 2xy - 3y^2 = 8 \\ 2x^2 + 4xy + 5y^2 = a^4 - 4a^3 + 4a^2 - 12 + \sqrt{105} \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

§ 3. ГРАФИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ИССЛЕДОВАНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ СИСТЕМ С ПАРАМЕТРАМИ

Для исследования систем уравнений графическими методами нам необходимо будет уметь строить множества точек на плоскости, описываемые различными уравнениями и неравенствами.

Мы выделили построение этих множеств в отдельные задачи, чтобы не загромождать решения непосредственно задач с параметрами.

Задача 22. Изобразить на плоскости xOy множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$|x| + |y| = 1 . \tag{49}$$

Показать, что искомое множество есть квадрат с центром в начале координат.

Решение. Раскроем модули в уравнении (49). Рассмотрим четыре случая.

<u>*Случай 1*</u>. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$. Тогда уравнение (49) принимает вид:

$$x + y = 1 . \tag{50}$$

(50) есть уравнение прямой. Нарисовав эту прямую, мы должны взять те ее точки, у которых x и $y \geq 0$, т. е. которые лежат в первом квадранте. На рис. 5 это отрезок AB.

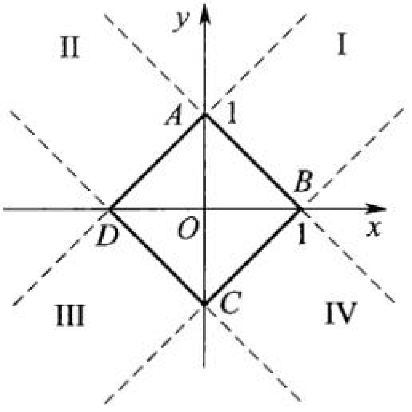


Рис. 5

<u>Случай 2</u>. $\begin{cases} x \geq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$. Тогда уравнение (49) имеет вид:

$$x - y = 1 \, .$$

Построив прямую $x - y = 1$, мы берем те ее точки, у которых $x \geq 0$, $y \leq 0$, т. е. которые находятся в IV-м квадранте. Это – отрезок BC (рис. 5).

<u>Случай 3</u>. $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \leq 0 \end{cases}$. Тогда уравнение (49) имеет вид:

$$-x - y = 1 \Leftrightarrow x + y = -1 \, .$$

В данном случае на прямой $x + y = -1$ надо взять те точки, которые находятся в III-м квадранте. Это – отрезок CD.

И, наконец,

<u>Случай 4</u>. $\begin{cases} x \leq 0 \\ y \geq 0 \end{cases}$. Тогда уравнение (49) имеет вид: $-x + y = 1$.

Нарисовав прямую $-x + y = 1$, берем те ее точки, у которых $x \leq 0$, $y \geq 0$. Это есть отрезок DA.

Итак, искомое множество точек есть четырехугольник $ABCD$. Так как четыре треугольника AOB, BOC, COD, DOA – прямоугольные и равнобедренные, то $ABCD$ – квадрат. Центр этого квадрата – точка пересечения диагоналей находится в начале координат. Длины диагоналей равны двум. Задача решена.

Замечание. Если условно считать радиусом квадрата радиус описанной вокруг него окружности, то квадрат на рис. 5 имеет радиус 1, т. к. $OA = OB = OC = OD = 1$. Такая терминология удобна при решении задач, и мы будем ею пользоваться.

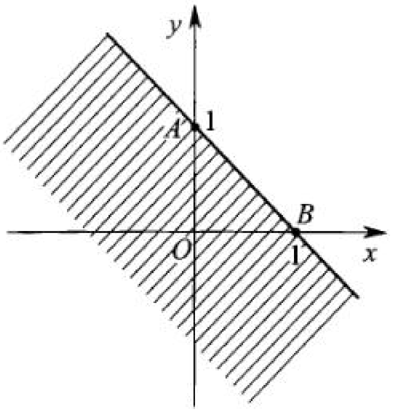


Рис. 6

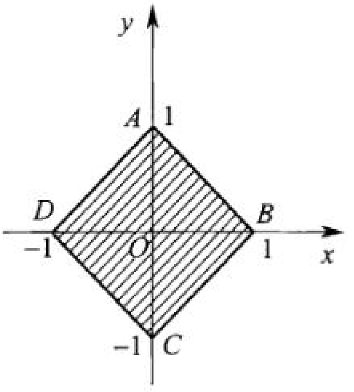


Рис. 7

Задача 23. Показать, что множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$|x| + |y| \le 1, \tag{51}$$

есть все точки плоскости, расположенные внутри квадрата $ABCD$ вместе с его границей (рис. 7).

Решение. <u>*Случай* 1</u>. $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$. Тогда неравенство (51) принимает вид:

$$x + y \le 1 \text{ или } y \le 1 - x.$$

Множество точек $y = 1 - x$ есть прямая. А множество точек $y \le 1 - x$ есть полуплоскость, находящаяся под этой прямой, включая все точки самой прямой (рис. 6). Пересечение этой полуплоскости с первым координатным углом (т. е. множеством точек $x \ge 0,\ y \ge 0$) есть треугольник AOB (рис. 6).

Аналогично, рассматривая еще три случая: 2) $\begin{cases} x \ge 0 \\ y \le 0 \end{cases}$, 3) $\begin{cases} x \le 0 \\ y \le 0 \end{cases}$, 4) $\begin{cases} x \le 0 \\ y \ge 0 \end{cases}$, мы получим еще три треугольника BOC, COD и DOA.

Следовательно, искомое множество точек представляет собой все внутренние и граничные точки квадрата единичного радиуса с центром в начале координат (рис. 7).

Аналогично показывается, что неравенству $|x| + |y| > 1$ удовлетворяют все точки плоскости, находящиеся вне квадрата $ABCD$ (рис. 8).

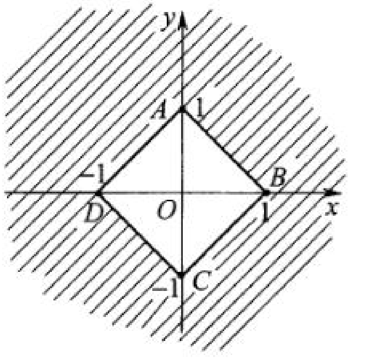


Рис. 8

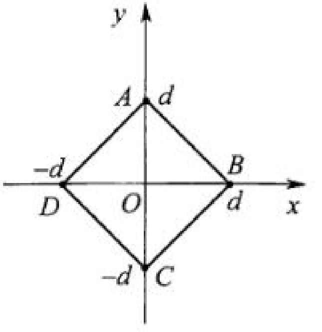


Рис. 9

Те же самые факты верны и в более общем случае. Так же, рассматривая четыре случая, нетрудно показать, что множество точек, удовлетворяющих уравнению $|x| + |y| = d$:

1. при $d > 0$ есть квадрат с центром в начале координат, радиуса d (рис. 9);
2. при $d = 0$ уравнению удовлетворяет только одна пара чисел $x = 0$; $y = 0$ (квадрат «вырождается» в точку);
3. при $d < 0$ – искомое множество пустое.

В случае неравенства $|x| + |y| < d$ $(d > 0)$ искомым множеством будет внутренность квадрата $ABCD$ (рис. 9). Неравенству $|x| + |y| > d$ $(d > 0)$ удовлетворяют все точки плоскости, лежащие вне квадрата $ABCD$.

Задача 24. Показать, что множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$|x-4| + |y-3| = 2, \tag{52}$$

есть квадрат радиуса 2 с центром в точке O_1 (4; 3) (рис. 11).

Решение. Раскроем знаки модулей.

Случай 1. $\begin{cases} x-4 \geq 0 \\ y-3 \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \geq 4 \\ y \geq 3 \end{cases}$. Тогда уравнение (52) принимает вид:

$$x-4+y-3=2 \Leftrightarrow y=9-x.$$

Множество $x \geq 4$ – это полуплоскость, лежащая правее прямой $x = 4$. На рис. 10 она заштрихована горизонтальными прямыми. Множество точек $y \geq 3$ есть полуплоскость, лежащая выше прямой $y = 3$. На рисунке она заштрихована вертикальными прямыми. Пересечением этих полуплоскостей будет угол, заштрихованный обеими штриховками.

Теперь, нарисовав прямую $y = 9 - x$, мы должны взять ту ее часть, которая находится внутри этого угла. На рис. 10 это отрезок AB.

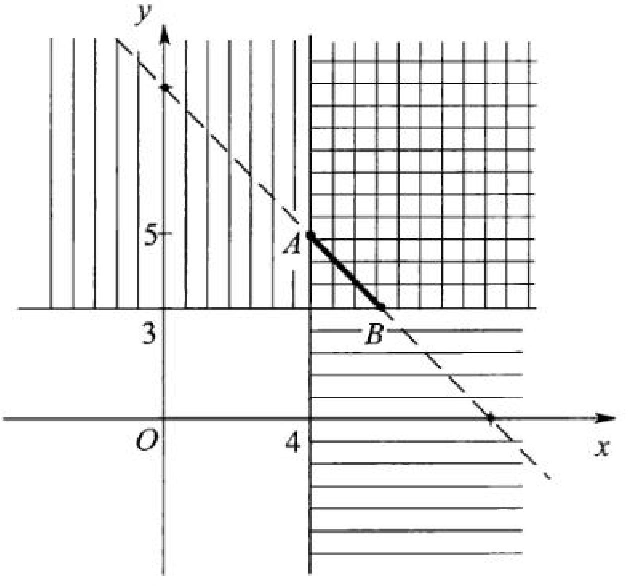


Рис. 10

Найдем координаты точек A и B. Подставив $x = 4$ в уравнение $y = 9 - x$, находим $y = 5$. Подставив в это же уравнение $y = 3$, получим $3 = 9 - x \Rightarrow x = 6$. Следовательно, точки A и B имеют координаты: $A\,(4;\,5)$, $B\,(6;\,3)$.

Рассмотрев еще три случая:

$$2)\ \begin{cases} x-4 \ge 0 \\ y-3 \le 0 \end{cases},\quad 3)\ \begin{cases} x-4 \le 0 \\ y-3 \le 0 \end{cases},\quad 4)\ \begin{cases} x-4 \le 0 \\ y-3 \ge 0 \end{cases}$$

(сделайте это самостоятельно!), мы увидим, что искомое множество представляет собой четырехугольник $ABCD$ (рис. 11).

Очевидно, что $ABCD$ – квадрат. Координаты его вершин: $A\,(4;\,5)$, $B\,(6;\,3)$, $C(4;1)$, $D(2;3)$. Поскольку $AO_1 = O_1B = O_1C = O_1D = 2$, то радиус квадрата равен 2.

Точно так же, раскрывая знаки модуля, нетрудно показать, что множеством точек, удовлетворяющих неравенству

$$|x-4| + |y-3| \le 2\,, \tag{53}$$

будет внутренность квадрата $ABCD$ вместе с его границей (рис. 11), а множеством точек, удовлетворяющих неравенству

$$|x-4| + |y-3| > 2,$$

будут все точки, лежащие вне квадрата *ABCD*. (Покажите это самостоятельно!) *

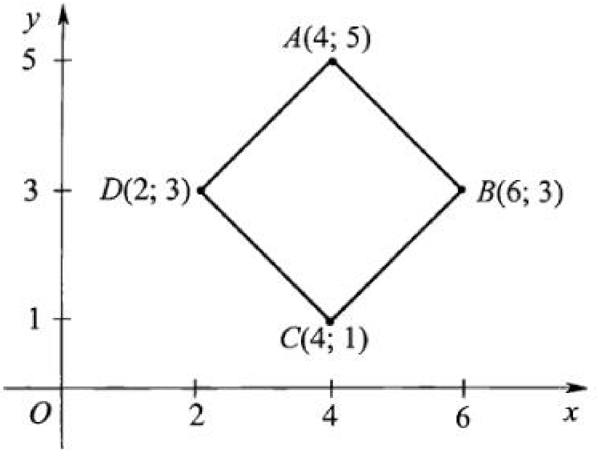


Рис. 11

Взглянув на решения предыдущих задач, легко видеть, что то же самое будет и в общем виде. Множеством точек, удовлетворяющих уравнению [1]

$$|x-a| + |y-b| = d, \qquad (54)$$

1. при $d > 0$ будет квадрат с центром в точке $O(a;\, b)$ радиуса d;

2. при $d = 0$ искомым множеством будет одна точка с координатами $x = a$; $y = b$ (квадрат «вырождается» в точку);

3. при $d < 0$ уравнение (54) не имеет решений.

В случае неравенств $|x-a| + |y-b| < d$ или $|x-a| + |y-b| > d$ ($d > 0$) искомым множеством будет либо внутренность квадрата, либо внешняя часть по отношению к этому квадрату.

Рассмотрим несколько задач построения множеств точек на плоскости, связанных с окружностью.

Из школьного курса геометрии известно, что множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + y^2 = R^2, \quad R > 0,$$

есть окружность радиуса R с центром в начале координат.

В общем виде уравнение окружности радиуса R с центром в точке $O_1\,(a;\, b)$ имеет вид:

---

[1] Те, кто знает элементарные приемы построения графиков, легко увидят, что квадрат $|x-4| + |y-3| = 2$ получается из квадрата $|x| + |y| = 2$ переносом его центра из точки $O\,(0;0)$ в точку $O_1\,(4;3)$.

$$(x-a)^2+(y-b)^2=R^2. \tag{55}$$

Эта окружность представлена на рис. 12.

Задача 25. Показать, что множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$x^2+6x+y^2-22y+114=0, \tag{56}$$

представляет собой окружность.

Решение. Представим исходное уравнение в виде $(x-a)^2+(y-b)^2=R^2$ и тем самым будет показано, что оно является уравнением окружности.

Выделим полные квадраты в левой части уравнения (56). Имеем

$$x^2+6x+y^2-22y+114=x^2+2\cdot 3\cdot x+3^2-3^2+y^2+2\cdot 11\cdot y+11^2-11^2+114=$$
$$=(x+3)^2+(y-11)^2-16.$$

Подставляя последнее выражение в (56), получаем

$$(x+3)^2+(y-11)^2-16=0 \quad \text{или} \quad (x+3)^2+(y-11)^2=16. \tag{57}$$

Из (57) видно, что это уравнение окружности с центром в точке O_1 (–3; 11) и радиуса 4 (рис. 13). Легко видеть, что то же самое будет и в общем виде.

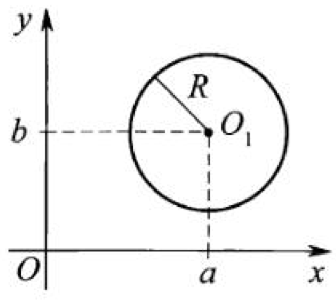


Рис. 12

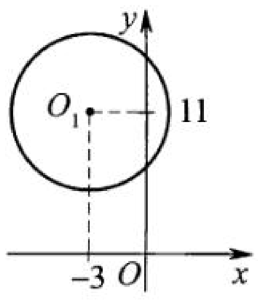


Рис. 13

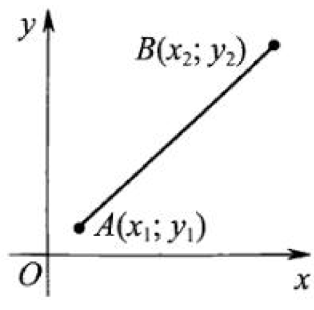


Рис. 14

Уравнение

$$x^2+ax+y^2+by+c=0 \tag{58}$$

всегда можно привести к виду (55). Действительно, выделив полные квадраты в левой части уравнения (58), имеем:

$$x^2+ax=x^2+2\cdot\frac{a}{2}\cdot x+\frac{a^2}{4}-\frac{a^2}{4}=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}.$$

Аналогично

$$y^2 + by = y^2 + 2\cdot\frac{b}{2}\cdot y + \frac{b^2}{4} - \frac{b^2}{4} = \left(y + \frac{b}{2}\right)^2 - \frac{b^2}{4}.$$

Подставляя полученные выражения в уравнение (58), получаем

$$(x+\frac{a}{2})^2 + (y+\frac{b}{2})^2 = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c. \qquad (59)$$

Обозначим $K = \frac{a^2}{4} + \frac{b^2}{4} - c$, тогда уравнение (59) примет вид:

$$(x+\frac{a}{2})^2 + (y+\frac{b}{2})^2 = K. \qquad (60)$$

Из (60) сразу видно:

1. если $K < 0$, то уравнение (60) решений не имеет;

2. если $K = 0$, то уравнению (60) удовлетворяет только одна точка $x = -\frac{a}{2}$, $y = -\frac{b}{2}$; действительно, сумма квадратов двух чисел может равняться 0, только когда оба этих числа равны 0; а это имеет место при $x = -\frac{a}{2}$, $y = -\frac{b}{2}$;

3. если $K > 0$, то множество точек, удовлетворяющих уравнению (60), представляет собой окружность с центром в точке $O_1(-\frac{a}{2}; -\frac{b}{2})$ и радиуса $\sqrt{K}$.

Примеры. а) Решить уравнение

$$x^2 + 6x + y^2 - 10y = 34.$$

Выделив полные квадраты в этом уравнении, получаем

$$x^2 - 2\cdot 3\cdot x + 3^2 - 3^2 + y^2 + 2\cdot 5\cdot y + 5^2 - 5^2 = 34 \Leftrightarrow (x-3)^2 + (y+5)^2 = 0.$$

Из последнего равенства видно, что ему удовлетворяет только одна пара чисел $x = 3$, $y = -5$.

б) Показать, что множество точек, удовлетворяющих уравнению

$$x^2 + y^2 = x + y,$$

представляет собой окружность.

Точно так же, выделяя полные квадраты, получаем

$$x^2 + y^2 = x + y \;\Leftrightarrow\; x^2 - x + y^2 - y = 0 \;\Leftrightarrow\; \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}.$$

Из последнего равенства видно, что оно определяет окружность с центром в точке $O\left(\frac{1}{2};\frac{1}{2}\right)$ и радиусом, равным $\sqrt{\frac{1}{2}}$.

Напомним формулу расстояния между двумя точками на плоскости. Пусть имеются две точки A $(x_1;\ y_1)$ и B $(x_2;\ y_2)$. Тогда расстояние AB (рис. 14) вычисляется по формуле $AB=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$.

Используя геометрическую интерпретацию расстояния между двумя точками, нетрудно показать, что множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$(x-a)^2+(y-b)^2<R^2$$

(где $R>0$), есть внутренность круга (рис. 12), а множество точек, удовлетворяющих неравенству

$$(x-a)^2+(y-b)^2>R^2,$$

есть множество точек, лежащих вне этого круга.

Перейдем к задачам с параметрами.

Задача 26. При каких значениях параметра a система уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2=a\\4x+3y=24\end{cases}\tag{61}$$

имеет единственное решение?

Эту задачу можно решить чисто аналитически. Подставив y из второго уравнения в первое, мы сведем задачу к исследованию квадратного уравнения. Но я хочу на этой простой задаче показать, как геометрические идеи могут помочь решить эту задачу без длинных выкладок.

Решение. 1. При $a<0$ первое уравнение решений не имеет.

2. $a=0$. Первому уравнению удовлетворяет лишь одна пара чисел $x=0$, $y=0$. Но эта пара не удовлетворяет второму уравнению. Следовательно, система также решений не имеет.

3. При $a>0$ первое уравнение определяет на плоскости окружность с центром в начале координат радиуса $R=\sqrt{a}$. Множество точек, удовлетворяющих второму уравнению, есть прямая линия, которая пересекает ось Oy в точке $A(0;\ 8)$ и ось Ox с точке $B(6;\ 0)$ (рис. 15).

Исходная система будет иметь одно решение в том и только в том случае, когда прямая будет касаться окружности (рис. 16). А это будет в случае, когда высота h треугольника OAB совпадает с радиусом окружности. По теореме Пифагора $AB = \sqrt{OA^2 + OB^2} = \sqrt{8^2 + 6^2} = 10$. Площадь треугольника OAB равна $S_{\triangle AOB} = \frac{1}{2} AB \cdot h = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot h = 5h$. С другой стороны, площадь треугольника OAB равна половине произведения его катетов $S_{\triangle AOB} = \frac{OA \cdot OB}{2} = \frac{6 \cdot 8}{2} = 24$. Приравнивая $5h = 24$, находим $h = 4{,}8$. Итак, имеем $R = \sqrt{a} = 4{,}8$. Отсюда находим $a = 23{,}04$.

Ответ: система имеет единственное решение при $a = 23{,}04$.

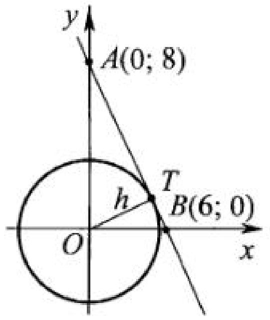


Рис. 15

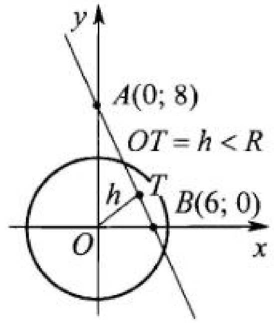


Рис. 16

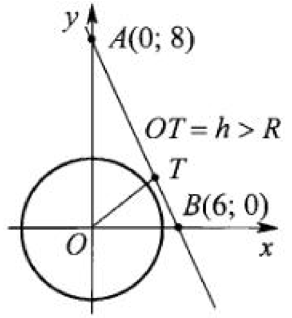


Рис. 17

Замечание. Легко видеть, что если $R > h$ (рис. 16), т. е. $\sqrt{a} > 4{,}8 \Leftrightarrow a > 23{,}04$, то прямая $4x + 3y = 24$ будет пересекать окружность в двух точках. Следовательно, система будет иметь два решения. Если $R < h$, т. е. $a < 23{,}04$, то прямая $4x + 3y = 24$ с окружностью не будет иметь общих точек (рис. 17) и, следовательно, при этих a система решений не имеет.

Задача 27. При каких значениях a система

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 7a - 3 \\ (x + y)^2 = 4a^2 \end{cases}$$

имеет ровно два решения?

Решение. При $7a - 3 \le 0$ система решений не имеет. При $7a - 3 > 0$, т. е. при $a > \frac{3}{7}$, первое уравнение системы определяет окружность с центром в начале координат и радиусом $R = \sqrt{7a - 3}$. Второе уравнение системы задает две прямые $x + y = 2a$ и $x + y == -2a$, симметричные относительно начала координат.

Система будет иметь два решения, если эти две прямые будут касаться окружности (рис. 18). (Случай, когда окружность пересекает только одну из двух прямых, а другую не пересекает, невозможен в силу симметрии прямых и окружности относительно начала координат.)

Как в предыдущей задаче, касание прямых с окружностью будет, если высота h треугольника OAB равняется радиусу R. Высота равнобедренного треугольника OAB легко вычисляется: $h = a\sqrt{2}$. Следовательно, имеем уравнение $a\sqrt{2} = \sqrt{7a-3}$. Решая его, находим $a_1 = 3, a_2 = \frac{1}{2}$.

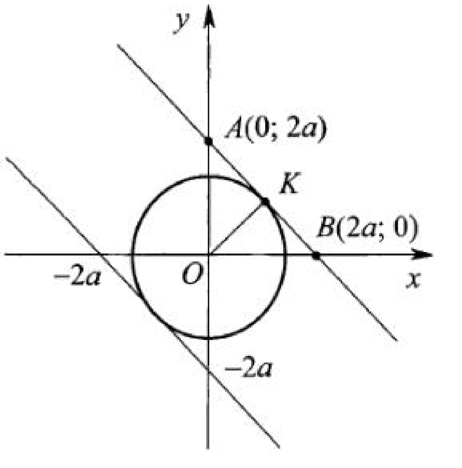


Рис. 18

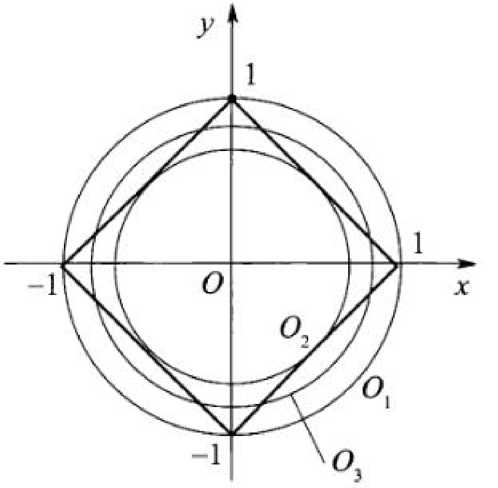


Рис. 19

Ответ: $a = 3, a = \frac{1}{2}$.

Задача 28.

В зависимости от a определить число решений системы

$$\begin{cases} |x| + |y| = 1 \\ x^2 + y^2 = a \end{cases}$$

Решение. 1. $a < 0$. Тогда второе уравнение, а следовательно, и система решений не имеют. 2. $a = 0$. Тогда второму уравнению удовлетворяет единственная пара чисел $x = 0$, $y = 0$. Но эта пара не удовлетворяет первому уравнению. Следовательно, при $a = 0$ решений также нет. 3. $a > 0$. В этом случае множество точек на плоскости, удовлетворяющее первому уравнению есть квадрат с центром в точке $O(0;0)$ радиуса 1 (см. задачу 22). А множество точек, удовлетворяющих второму уравнению, есть окружность с центром в начале координат и радиуса $R = \sqrt{a}$.

Число пересечений окружности с квадратом и есть число решений системы. Если окружность проходит через вершины квадрата (рис. 19, окружность O_1), то система имеет четыре решения. Это будет при $R=\sqrt{a}=1$, т. е. при $a=1$.

Если окружность касается сторон квадрата (рис. 19, окружность O_2), то система также имеет четыре решения. Диаметр вписанной окружности равен стороне квадрата. Из ΔAOB по теореме Пифагора находим сторону $AB=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. Следовательно, радиус R вписанной окружности равен $\frac{\sqrt{2}}{2}$. С другой стороны, из второго уравнения исходной системы $R=\sqrt{a}$. Следовательно, имеем $\sqrt{a}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Leftrightarrow a=\frac{1}{2}$. Итак, при $a=\frac{1}{2}$ окружность касается сторон квадрата. При $\frac{1}{2}<a<1$ окружность пересекает стороны квадрата в восьми точках (рис. 19, окружность O_3). Следовательно, система имеет восемь решений. При $a>1$ и $a<\frac{1}{2}$ окружность и квадрат не имеют общих точек. Следовательно, при этих a система решений не имеет.

Ответ:

при $a\in(-\infty;\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)$ решений нет;

при $a=\frac{1}{2}$ и $a=1$ система имеет четыре решения;

при $a\in(\frac{1}{2};1)$ система имеет восемь решений.

Задача 29. При каких a система уравнений

$$\begin{cases}|x-4|+|y-3|=2\\ x^2-4y=3a+18x-y^2-86\end{cases}$$

имеет единственное решение.

Решение. Преобразуем второе уравнение системы. Имеем

$$x^2-18x+y^2-4y=3a-86\Leftrightarrow x^2-2\cdot9\cdot x+9^2-9^2+y^2-2\cdot2\cdot y+2^2-2^2=3a-86\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow(x-9)^2+(y-2)^2-9^2-2^2=3a-86\Leftrightarrow(x-9)^2+(y-2)^2=3a-1.$$

Перепишем теперь исходную систему в виде:

$$\begin{cases} |x-4|+|y-3|=2 \\ (x-9)^2+(y-2)^2=3a-1 \end{cases}. \tag{62}$$

1. Если $3a-1<0$, то второе уравнение системы решений не имеет.

2. Если $3a-1=0$, то второе уравнение системы имеет единственное решение $x=9, y=2$. Но эта пара не удовлетворяет первому уравнению.

3. Если $3a–1>0 \Leftrightarrow a>\frac{1}{3}$, то второе уравнение представляет собой окружность с центром в точке $O_1(9;\ 2)$ и радиусом $R=\sqrt{3a-1}$. А первое уравнение есть квадрат с центром в точке $O_2(4;\ 3)$ и радиусом 2. Его вершины имеют координаты: $A(4;6)$, $B(6;3)$, $C(4;1)$, $D(2;3)$.

Эти множества имеют только одну общую точку, когда окружность проходит либо через вершину B, либо через вершину D (рис. 20). Рассмотрим эти случаи отдельно. а) Окружность проходит через вершину B, если ее радиус равен длине отрезка O_1B (рис. 20, окружность C_1). Длина отрезка O_1B равна: $O_1B=\sqrt{(6-9)^2+(3-2)^2}=\sqrt{10}$. Радиус окружности $R=$ $=\sqrt{3a-1}$. Итак, имеем $\sqrt{3a-1}=\sqrt{10}$. Откуда находим $a=\frac{11}{3}$. б) Окружность проходит через вершину D, если ее радиус равен длине отрезка O_1D. Итак, имеем: $O_1D=\sqrt{(2-9)^2+(3-2)^2}=\sqrt{50}$. Следовательно, $\sqrt{3a-1}=\sqrt{50} \Leftrightarrow a=17$.

Ответ: $a=\frac{11}{3}$, $a=17$.

Задача 30. При каких значениях параметра a система неравенств

$$\begin{cases} |x-4|+|y-3|\le 2 & (а) \\ (x-9)^2+(y-2)^2\le 3a-1 & (б) \end{cases} \tag{63}$$

имеет единственное решение. При этих a решить систему.

Эта задача отличается от предыдущей. В ней мы уравнения заменили на неравенства. Для ее решения мы используем те же геометрические образы.

Решение. Рассмотрим два случая.

1. Если $3a-1\le 0$, то система решений не имеет.

2. Если $3a-1>0 \Leftrightarrow a>\frac{1}{3}$, тогда множеством точек, удовлетворяющих неравенству (63a), будут все точки, лежащие внутри квадрата $ABCD$ или на

его границе, а точками, удовлетворяющими неравенству (63*б*), будут все точки, принадлежащие кругу с центром в точке $O(9;2)$ и радиусом $R = \sqrt{3a-1}$ (рис. 21). По условию задачи нам надо найти такую конфигурацию круга и квадрата, при которой указанные два множества будут иметь только одну общую точку. Легко видеть, что это будет только в одном случае, когда граница круга проходит через вершину B (рис. 21).

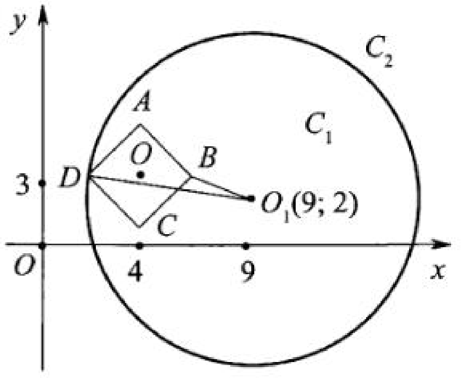


Рис. 20

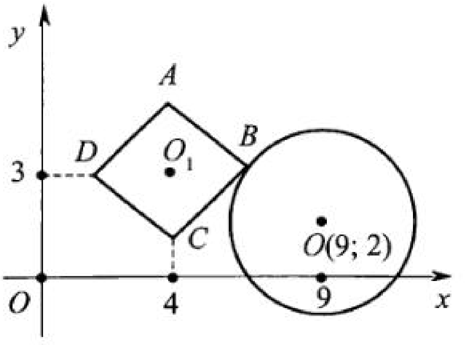


Рис. 21

А это, как мы уже выяснили в предыдущей задаче, будет при $a = \dfrac{11}{3}$. Решением системы (63) при этом значении a будут координаты вершины B, т. е. $x = 6, y = 3$.

Ответ: $a = \dfrac{11}{3}$. Решением будет пара $x = 6, y = 3$.

Заметим, что в случае, когда окружность проходит через вершину D, система (63) будет иметь бесконечное число решений и поэтому этот случай нам не подходит.

Задача 31. Найти все значения a, при которых среди решений $(x; y)$ системы неравенств

$$\begin{cases} y-\sqrt{a^2-x^2} \le 0 \\ y+\dfrac{1}{2}x+2a \ge 11 \end{cases}$$

нет решений, у которых значение $y \le 0$, в то же время имеется хотя бы одно решение $(x; y)$, у которого значение $x < 0$.

Решение. Перепишем нашу систему в виде:

$$\begin{cases} y \le \sqrt{a^2 - x^2} \\ y \ge -\dfrac{1}{2}x - 2a + 11 \end{cases}.$$

Графиком функции $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ является полуокружность (см. главу 6, задачу 26), а множеством точек, удовлетворяющих неравенству $y \le \sqrt{a^2 - x^2}$, будут все точки, находящиеся под этой полуокружностью вместе с границей (рис. 22). Множество точек, удовлетворяющих второму

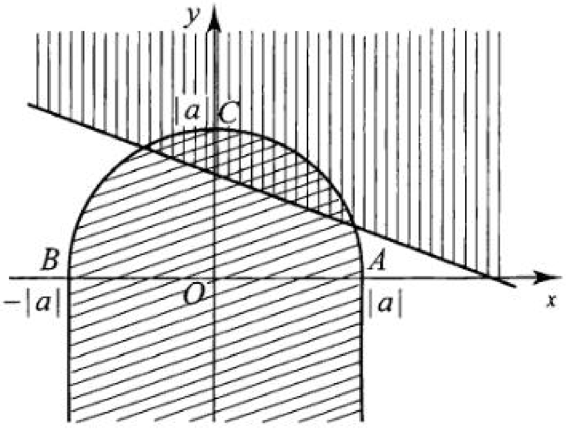


Рис. 22

неравенству, есть полуплоскость. Пересечение этих двух множеств представляет собой множество решений системы (рис. 22).

Чтобы имелось решение системы $(x; y)$, у которого $x < 0$, прямая $y = -\frac{1}{2}x - 2a + 11$ должна проходить ниже точки $C(0; |a|)$. А чтобы не было решений, у которых $y \le 0$, прямая $y = -\frac{1}{2}x - 2a + 11$ должна проходить выше точек $A(|a|;0)$ и $B(-|a|;0)$. Это будет при выполнении неравенств:

$$\begin{cases} y(0) = -\dfrac{1}{2}\cdot 0 - 2a + 11 < |a| \\ y(|a|) = -\dfrac{1}{2}|a| - 2a + 11 > 0 \\ y(-|a|) = \dfrac{1}{2}|a| - 2a + 11 > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -2a + 11 < |a| \\ \dfrac{1}{2}|a| + 2a - 11 < 0 \\ \dfrac{1}{2}|a| - 2a + 11 > 0 \end{cases}.$$

Раскрыв знаки модуля, находим решение системы $a \in \left(\frac{11}{3}; \frac{22}{5}\right)$.

Ответ: $a \in \left(\frac{11}{3}; \frac{22}{5}\right)$.

Задача 32. При всех a определить число решений системы

$$\begin{cases} |x+2|+2|y|-2=0 \\ ax-y-2a+3=0 \end{cases}.$$

Решение. Изобразим на плоскости множество точек, удовлетворяющих первому уравнению системы.

Случай 1. $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ y\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\geq -2 \\ y\geq 0 \end{cases}$. Тогда первое уравнение системы имеет вид:

$$x+2+2y-2=0 \Leftrightarrow x+2y=0 \Leftrightarrow y=-\frac{x}{2}.$$

Множество точек, удовлетворяющих системе неравенств, есть угол, ограниченный прямыми, $x=-2$ и $y=0$. (На рис. 23 он заштрихован пунктирными линиями). Теперь, нарисовав прямую $y=-\frac{x}{2}$, мы должны взять ту ее часть, которая находится внутри угла. Это отрезок OA. Подставляя $x=-2$ в уравнение $y=-\frac{x}{2}$, получаем $y=1$. Пара $x=-2$, $y=1$ – это координаты точки A (рис. 23).

Рассматривая аналогично еще три случая 2) $\begin{cases} x+2\geq 0 \\ y\leq 0 \end{cases}$, 3) $\begin{cases} x+2\leq 0 \\ y\leq 0 \end{cases}$ и 4) $\begin{cases} x+2\leq 0 \\ y\geq 0 \end{cases}$, мы найдем, что искомое множество точек есть четырехугольник $OABC$ (рис. 24). Его вершины O, A, B и C имеют координаты: $O(0;0)$, $A(-2;1)$, $B(-4;0)$, $C(-2;-1)$. (Легко показать, хотя для решения задачи это и не обязательно, что данный четырехугольник есть ромб. Это следует из того, что диагонали BO и AC взаимно-перпендикулярны и в точке пересечения делятся пополам).

Теперь, представив второе уравнение в виде $y=a(x-2)+3$, видим, что оно представляет собой семейство прямых, проходящих через точку $M(2;3)$ (рис. 24). Найдем, при каких a прямые этого семейства проходят через вершины A, B, C и O.

1) Прямая $y=a(x-2)+3$ проходит через вершину A (2;1), если ее координаты удовлетворяют уравнению $y=a(x-2)+3$. Имеем, $1=a(-2-2)+3 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$. Следовательно, вершина A (2;1) лежит на прямой $y=\frac{1}{2}(x-2)+3=\frac{1}{2}x+2$.

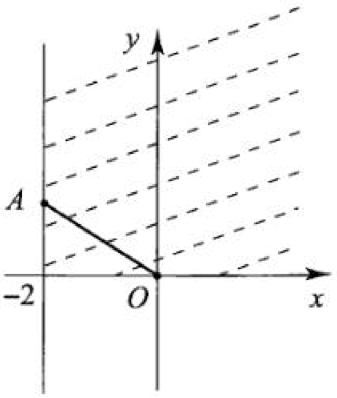


Рис. 23

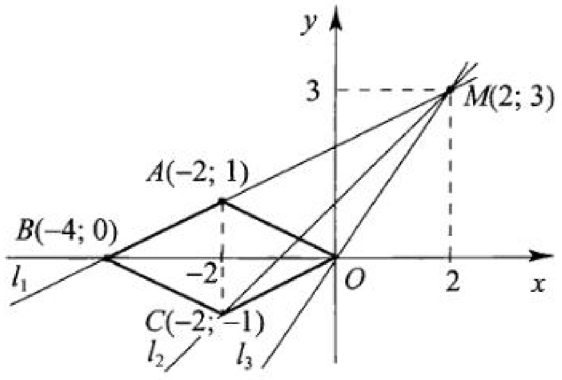


Рис. 24

2) Подставляя координаты вершины $B(-4;0)$ в уравнение $y=a(x-2)+3$, найдем, при каком a вершина B лежит на этой прямой. Имеем $0=a(-4-2)+3 \Rightarrow a=\frac{1}{2}$. Следовательно, вершина B также лежит на прямой $y=\frac{1}{2}x+2$. А это означает, что весь отрезок AB лежит на прямой $y=\frac{1}{2}x+2$ (на рис. 24, прямая l_1). Следовательно, при $a=\frac{1}{2}$ система имеет бесконечное число решений и решениями будут абсциссы всех точек этого отрезка.

3) Прямая $y=a(x-2)+3$ проходит через вершину $C(-2;\ -1)$, если выполняется равенство $-1=a(-2-2)+3 \Rightarrow a=1$. Следовательно, вершина $C(-2;-1)$ лежит на прямой $y=(x-2)+3=x+1$ (на рис. 24 прямая l_2).

4) И, наконец, прямая $y=a(x-2)+3$ проходит через вершину $O(0;\ 0)$, если $0=a(0-2)+3 \Rightarrow a=\frac{3}{2}$. Уравнение этой прямой имеет вид: $y=\frac{3}{2}(x-2)+3=\frac{3}{2}x$ (на рис. 24 прямая l_3).

Из пунктов 3) и 4) и графиков на рис. 24 видно, что прямая имеет одну общую точку с четырехугольником $OABC$ при $a=\frac{3}{2}$ (прямая l_3). Следовательно, при $a=\frac{3}{2}$ система будет иметь одно решение. При $\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$ система будет иметь два решения.

Ответ:
- при $a=\frac{1}{2}$ система имеет бесконечно много решений;
- при $a=\frac{3}{2}$ система имеет одно решение;
- при $\frac{1}{2}<a<\frac{3}{2}$ система имеет два решения;
- при остальных a решений нет.

Задача 33. Найти все значения параметров a и b, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+5=b^2+2x-4y \\ x^2+(12-2a)x+y^2=2ay+12a-2a^2-27 \end{cases}$$

имеет два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, удовлетворяющие условию

$$\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}.$$

Решение. Эта задача несколько труднее предыдущих. Главное в ней – увидеть геометрическую интерпретацию всех ее условий. Чисто аналитический подход к этой задаче увел бы нас в «дебри».

Выделив в исходной системе уравнений полные квадраты, как мы это уже не раз делали, получаем систему

$$\begin{cases} (x-1)^2+(y+2)^2=b^2 \\ (x+(6-a))^2+(y-a)^2=9 \end{cases}.$$

Таким образом, первое и второе уравнения задают на плоскости xOy окружности. Для того, чтобы система имела два решения, эти окружности должны пересекаться в двух точках (на рис. 25 точки $A\ (x_1; y_1)$ и $B\ (x_2; y_2)$).

Условие $\frac{x_1-x_2}{y_2-y_1}=\frac{y_1+y_2}{x_1+x_2}$ после несложных преобразований легко приводится к виду $x_1^2+y_1^2=x_2^2+y_2^2$. Последнее означает, что точки $A(x_1; y_1)$ и $B(x_2; y_2)$ одинаково удалены от начала координат – точки O.

Из курса геометрии известно, что если точка O равноудалена от концов отрезка AB, то она лежит на срединном перпендикуляре к отрезку AB (т. е. на перпендикуляре, проведенном через его середину). С другой стороны, если соединить центры $O_1(1; -2)$ и $O_2(a-6; a)$, то прямая O_1O_2 будет также перпендикулярна к отрезку AB и будет проходить через его середину. Следовательно, прямая O_1O_2 и будет срединным перпендикуляром к отрезку AB, и начало координат (точка O) будет лежать на этой прямой.

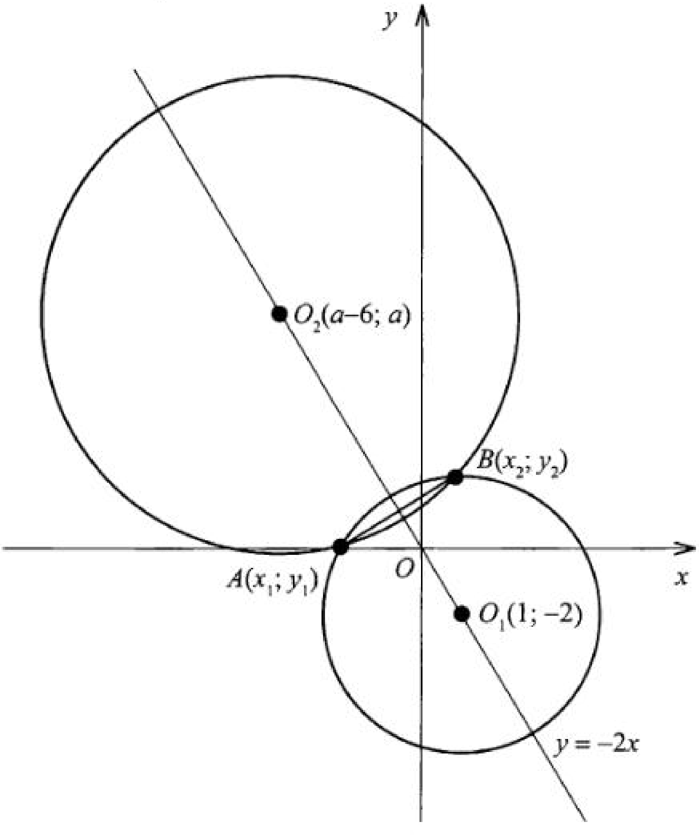


Рис. 25

Найдем уравнение прямой O_1O_2. Так как эта прямая проходит через начало координат $O(0; 0)$ и центр окружности $O_1(1; -2)$, то подставляя координаты этих точек в уравнение прямой $y = kx + b$, находим уравнение искомой прямой $y = -2x$ (рис. 25). Подставляя теперь в уравнение $y = -2x$ координаты центра $O_2(a-6; a)$, получаем уравнение $a = -2(a-6)$, откуда находим $a = 4$. Следовательно, координаты O_2 есть $x = -2$, $y = 4$.

Найдем теперь расстояние между центрами O_1 и O_2 наших окружностей. Имеем $O_1O_2 = \sqrt{(1-(-2))^2 + (-2-4)^2} = 3\sqrt{5}$. Чтобы две окружности пересекались, расстояние между их центрами должно быть меньше суммы радиусов и больше разности радиусов. Сумма радиусов равна $|b|+3$. Разность радиусов равна $|b|-3$. (Радиус первой окружности $R_1=|b|$, радиус второй окружности $R_2 = 3$). Осталось решить неравенство: $|b|-3<3\sqrt{5}<|b|+3 \Leftrightarrow \begin{cases}|b|-3<3\sqrt{5}\\ |b|+3>3\sqrt{5}\end{cases}$. Рассматривая два случая $b\geq 0$ и $b\leq 0$, получаем: $b\in(-3\sqrt{5}-3;\ 3-3\sqrt{5})\cup(3\sqrt{5}-3;\ 3\sqrt{5}+3)$.

Ответ: $a=4$, $b\in(-3\sqrt{5}-3;\ 3-3\sqrt{5})\cup(3\sqrt{5}-3;\ 3\sqrt{5}+3)$.

Задача 34. Найти все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b система уравнений

$$\begin{cases}x^2+y^2-5x+6y+4=0\\ y+bx+ab=0\end{cases} \tag{64}$$

имеет ровно два различных решения.

Эта задача по своей формулировке аналогична задачам (8)–(11) главы 7, о которых мы говорили, что для их решения требуется «железная логика». Но если задачи (8)–(11) мы решали чисто аналитически, то для решения этой задачи мы используем графические представления.

Разберем ее подробно, чтобы были видны все логические тонкости, имеющиеся в формулировке этой задачи, и чтобы еще раз показать, как приходят к решению в таких задачах.

По условию задачи нам надо искать только значения параметра a. Для краткости назовем значения параметра a, которые удовлетворяют условию задачи, «хорошими». Итак, нам надо найти все «хорошие» значения a. Сначала, как это мы делали не раз, возьмем несколько значений a и посмотрим, «хорошие» ли они, а если нет, то почему.

1. $a=1$. Тогда система (64) принимает вид:

$$\begin{cases}x^2+y^2-5x+6y+4=0\\ y+bx+b=0\end{cases}. \tag{65}$$

Стандартно преобразовав первое уравнение этой системы, легко показать, что оно задает окружность

$$(x-\frac{5}{2})^2+(y+3)^2=\frac{45}{4}. \tag{66}$$

Найдем точки пересечения этой окружности с осью Ox. Подставив $y=0$ в (66), получаем

$$(x-\frac{5}{2})^2+3^2=\frac{45}{4}.$$

Откуда находим $x_1=1, x_2=4$.

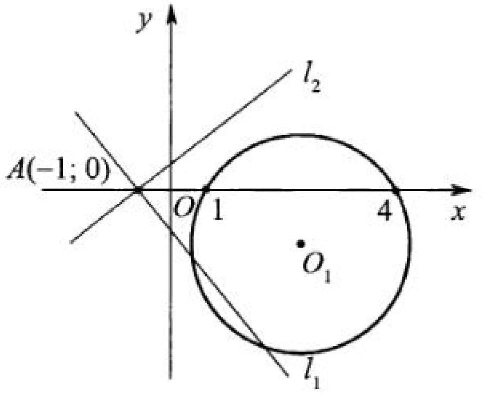


Рис. 26

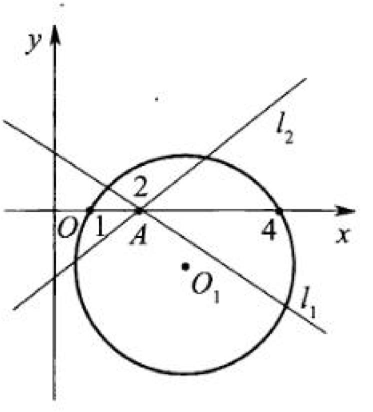


Рис. 27

Перепишем теперь систему (65) в виде:

$$\begin{cases}(x-\frac{5}{2})^2+(y+3)^2=\frac{45}{4} \\ y=-b(x+1)\end{cases}. \tag{67}$$

Второе уравнение системы (67) при каждом b задает прямую, причем все эти прямые проходят через точку A $(-1; 0)$ (рис. 26).

Значение $a=1$ будет «хорошим», если все эти прямые будут пересекать окружность в двух точках. Это и будет означать, что при каждом b система имеет два решения.

Поскольку точка A $(-1; 0)$ лежит вне окружности, то легко построить прямую, которая вообще не пересекает окружность. На рис. 26 прямая l_1 пересекает окружность в двух точках, а прямая l_2 не имеет с окружностью ни одной общей точки. Это означает, что $a=1$ не удовлетворяет условию задачи.

2. $a=-2$. Подставив $a=-2$ в исходную систему, перепишем ее в виде:

$$\begin{cases}(x-\frac{5}{2})^2+(y+3)^2=\frac{45}{4} \\ y=-b(x-2)\end{cases} \tag{68}$$

Первое уравнение системы (68) задает ту же самую окружность. Второе уравнение задает семейство прямых, проходящих через точку A (2; 0), которая находится внутри круга (рис. 27). Поэтому любая прямая этого семейства пересекает окружность ровно в двух точках. Следовательно, $a = -2$ удовлетворяет условию задачи.

Из этих двух примеров становится ясно: если точка A находится вне окружности, то всегда есть прямая, проходящая через A и не имеющая с окружностью общих точек. А если точка A лежит внутри окружности, то любая прямая, проходящая через A, пересекает окружность ровно в двух точках.

Теперь понятно, как подойти к задаче в общем виде.

Решение. Перепишем систему (64) в виде:

$$\begin{cases} (x-\frac{5}{2})^2+(y+3)^2=\frac{45}{4} \\ y=-b(x+a) \end{cases}.$$

Первое уравнение, как мы уже говорили, определяет окружность, которая пересекает ось Ox в точках $x_1 = 1, x_2 = 4$. Второе уравнение определяет семейство прямых, проходящих через точку $A(-a;\ 0)$. Наличие решений при любом b означает, что все эти прямые пересекают окружность ровно в двух точках. А это будет в том и только в том случае, когда точка $A(-a;\ 0)$ находится внутри окружности (рис. 28). Последнее имеет место при выполнении неравенств $1 < -a < 4$. Откуда получаем $-1 > a > -4$.

Ответ: $a \in (-4; -1)$.

В заключение решим задачу, которая по формулировке не является задачей с параметрами, но для ее решения мы сами вводим параметр.

Задача 35. Найти наибольшее из значений, которые принимает выражение $3x + 4y$, если x и y удовлетворяет условию

$$x^2 - 12y \le 18x + 92 - y^2. \tag{69}$$

Решение. I-й способ, аналитический. Пусть x и y – некоторые числа. Обозначим

$$a = 3x + 4y. \tag{70}$$

По условию задачи нам надо найти наибольшее значение a, при условии, что числа x и y удовлетворяют неравенству (69).

Введенная нами переменная по существу и есть параметр, и мы ищем наибольшее значение этого параметра.

Из (70) находим $y = \dfrac{a-3x}{4}$. Подставив это выражение в неравенство (69), получаем

$$x^2 - 12 \cdot \frac{a-3x}{4} \le 18x + 92 - \left(\frac{a-3x}{4}\right)^2,$$

а после преобразований

$$25x^2 - (6a + 144) + a^2 - 48a + 1472 \le 0 . \qquad (71)$$

Теперь исходная задача равносильна следующей: найти наибольшее значение a, при котором неравенство (71) имеет решения. Очевидно, что это квадратное неравенство имеет решения, если дискриминант квадратного трехчлена в левой части неравенства (71) будет ≥ 0. Имеем

$$\mathrm{D} = (6a + 144)^2 - 4 \cdot 25 \cdot (a^2 - 48a + 1472) = 6528a - 64\,a^2 - 126464 \ge 0.$$

Сокращая последнее неравенство на (–64), получаем

$$a^2 - 102a + 1976 \le 0 . \qquad (72)$$

Решением неравенства (72) будут $a \in [26;\ 76]$. Из этого видно, что наибольшее значение a равно 76.

Ответ: $a = 76$.

Замечание. На самом деле в приведенном решении мы нашли не только наибольшее значение выражения $3x + 4y$, но вообще множество всех значений, которые принимает выражение $3x + 4y$, когда x и y удовлетворяют неравенству (69). Это промежуток $[26;\ 76]$.

II-й способ, графический.

Преобразуем стандартным образом неравенство (69). Имеем

$$x^2 - 18x + y^2 - 12y \le 92 \Leftrightarrow (x-9)^2 + (y-6)^2 \le 25 . \qquad (73)$$

Из (73) видно, что множество точек, удовлетворяющих этому неравенству, представляет собой круг радиуса 5 с центром в точке $O_1(9;\ 6)$.

Множество точек, удовлетворяющих уравнению $3x + 4y = a$, при каждом значении a представляет собой прямую линию, причем все эти прямые параллельны друг другу. Например, при $a = 40$ это прямая l_1 (рис. 29). Во всех точках этой прямой выполняется равенство $3x + 4y = 40$. При $a = 60$ это будет другая прямая, параллельная l_1.

Для того, чтобы найти наибольшее значение a, будем рассуждать так. Пусть a – некоторое произвольное значение. Пересечем круг прямой

$3x + 4y = a$ (на рис. 29 прямая l) и будем двигать ее в сторону увеличения значений a до тех пор, пока она не выйдет за круг [1].

Из сказанного ясно, что «последнее» положение прямой l при таком движении – это то, при котором она будет касательной к кругу (прямая l_3 на рис. 29).

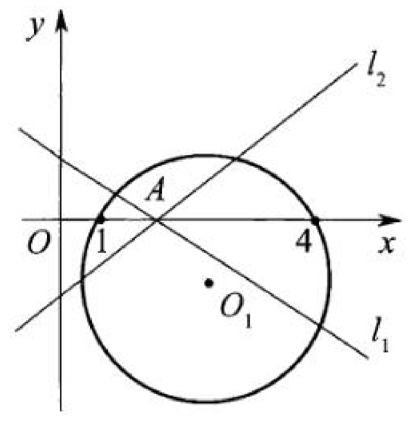


Рис. 28

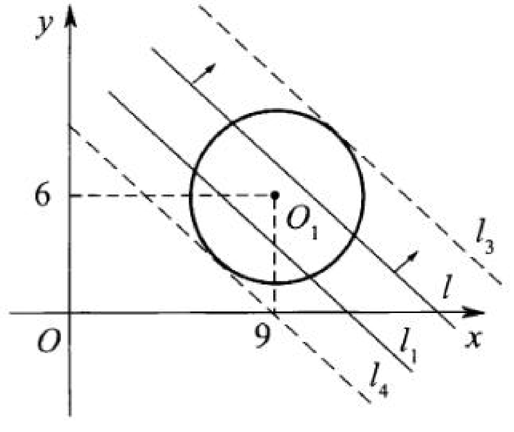


Рис. 29

Итак, задача свелась к следующей: при каких a прямая $3x + 4y = a$ касается круга (73). Это будет в том и только в том случае, когда система

$$\begin{cases} 3x+4y=a \\ (x-9)^2+(y-6)^2=25 \end{cases} \tag{74}$$

имеет единственное решение.

Подставив $y=\dfrac{a-3x}{4}$ во второе уравнение, после несложных, но громоздких преобразований, приходим к уравнению

$$25x^2-(6a+144)x+a^2-48a+1472=0\,. \tag{75}$$

Теперь задача свелась к нахождению значений a, при которых уравнение (75) имеет одно решение. Это будет при $D = 0$. Имеем

$$D = 64a^2 - 6528a + 126464\,.$$

Решая уравнение $D = 0$, находим $a_1 = 76$, $a_2 = 26$.

Два значения a означают, что имеются две касательные. Одна $3x + 4y = 76$, другая $3x + 4y = 26$. Вторая прямая касается «снизу» нашего круга (на рис. 29 прямая l_4) и соответствует перемещению прямой l в сторону

---

[1] Если прямая l вышла за круг, это означает, что на ней нет точек, удовлетворяющих неравенству (73).

уменьшения. Значение $a = 26$ есть наименьшее значение выражения $3x + 4y$.

Ответ: наибольшее значение выражения равно 76.

Замечание. Если еще раз взглянуть на условие и решение последней задачи, то нетрудно увидеть, что ее можно было сразу переформулировать и решать как задачу с параметрами: найти все значения параметра a, при которых система

$$\begin{cases} x^2 - 12y \le 18x + 92 - y^2 \\ 3x + 4y = a \end{cases} \tag{76}$$

имеет решения. В ответ записать наибольшее значение параметра a.

Из разобранных выше решений этой задачи мы видели, что система (76) имеет решения при всех $a \in [26; 76]$. При этом $a = 26$ есть наименьшее значение параметра, $a = 76$ – наибольшее.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

При всех a определить число решений следующих систем:

1. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2a - 4 \\ 2x + y = 8 \end{cases}$;

2. $\begin{cases} |x| + |y| = a \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$.

3. При каких значениях параметра a система $\begin{cases} x^2 + y^2 = 2(a+1) \\ (x+y)^2 = 14 \end{cases}$ имеет ровно два решения?

4. При каких значениях a система $\begin{cases} |x| + |y| = 4 \\ 4y + a = 4x^2 \end{cases}$ имеет четыре решения?

5. При каком значении a система $\begin{cases} x^2 + y^2 + 2y \le 1 \\ x + y - a \ge 0 \end{cases}$ имеет одно решение?

6. Найти все a, при которых система $\begin{cases} |x| + |y| - 1 = 0 \\ ax - y - 3a + 1 = 0 \end{cases}$ имеет единственное решение.

7. Найти все a, при которых система $\begin{cases} 3|x-2|+|y|-3=0 \\ ax-y+2a+2=0 \end{cases}$

имеет два решения.

БОЛЕЕ ТРУДНЫЕ ЗАДАЧИ

8. Найти все значения параметра a, для каждого из которых при любом значении параметра b система уравнений $\begin{cases} x^2+y^2+10x-12y+20=0 \\ y+bx+a=0 \end{cases}$

имеет ровно два различных решения.

9. Определите, при каких значениях a имеет хотя бы одно решение $(x; y)$ следующая система $\begin{cases} \sqrt{-y^2-2x}=ax \\ y \geq 2{,}5+a \end{cases}$.

10. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых система

$\begin{cases} x^2+y^2-6|x|-6|y|+17 \leq 0 \\ x^2+y^2-2y=a^2-1 \end{cases}$ имеет хотя бы одно решение.

11. При каких значениях параметра p площадь фигуры, заданной на координатной плоскости условием $|2x+y|+|x-y+3| \leq p$,

будет равна 24 ?

12. Найти все значения параметра p, при которых система уравнений

$$\begin{cases} (|x|+|y|-p)\cdot(|x|+|y|+|x+y|-2p)=0 \\ x^2+y^2=\frac{1}{p^2} \end{cases}$$

имеет ровно 4 различных решения.

13. Найти все значения параметров p и q, при которых система уравнений

$$\begin{cases} x^2+y^2+2p^2=(10-2p)\,y+2px+10p-21 \\ x^2+y^2+52=q^2-8x-12y \end{cases}$$

имеет два решения $(x_1; y_1)$ и $(x_2; y_2)$, удовлетворяющие условию

$$\frac{x_1-x_2}{y_2+y_1}=\frac{y_2-y_1}{x_1+x_2}.$$

Глава 9

ЗАДАЧИ С ПАРАМЕТРАМИ НА ЕДИНОМ ГОСУДАРСТВЕННОМ ЭКЗАМЕНЕ

В этой главе мы рассмотрим задачи, предлагавшиеся школьникам как на самом едином экзамене, так и при подготовке к нему. Некоторые из них ранее предлагались на вступительных экзаменах и олимпиадах в различных вузах страны. Для их решения вполне достаточно материала, разобранного в предыдущих главах, но в ряде задач требуется знание дополнительных фактов. Подробно эти факты будут рассмотрены во второй части книги, здесь же мы изложим их в той степени, в какой это необходимо для решения данных задач. Перейдем к примерам.

Задача 1. Найти все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(3; 9]$ значение выражения $\log_3^2 x + 3\log_3 x$ не равно значению выражения $9 + a\log_3 x$.

Решение. Задача сформулирована несколько нестандартно для школьника. Фраза «значение одного выражения не равно значению другого выражения на некотором промежутке» многими школьниками воспринимается с трудом. Однако небольшой анализ задачи, а затем простая переформулировка сводит ее к абсолютно стандартной задаче.

Действительно, условие того, что значение выражения $\log_3^2 x + 3\log_3 x$ не равно значению выражения $9 + a\log_3 x$ на промежутке $(3; 9]$, означает, что на этом промежутке не имеет решений уравнение

$$\log_3^2 x + 3\log_3 x = 9 + a\log_3 x. \tag{1}$$

Обозначим $t = \log_3 x$. Тогда уравнение (1) примет вид

$$t^2 + 3t = 9 + at \quad \text{или} \quad t^2 + (3 - a)t - 9 = 0. \tag{2}$$

Так как $x \in (3; 9]$ и $t = \log_3 x$, то $t \in (1; 2]$.

Теперь наша задача свелась к следующей. Найти все значения a, при которых квадратное уравнение (2) не имеет решений на промежутке $(1; 2]$. Такого вида задачи мы подробно разбирали в главе 3.

Конечно, можно просто перебрать все случаи, когда квадратное уравнение не имеет корней на промежутке $(1; 2]$. Но если учесть специфику уравнения (2), то это позволит нам некоторые случаи просто не рассматривать, поскольку они не могут иметь места в нашем уравнении.

Рассмотрим более подробно уравнение (2). Поскольку свободный член в нем отрицательный, то его дискриминант всегда положительный. Поэтому при любых значениях a уравнение (2) имеет два корня t_1 и t_2. Кроме того, по теореме Виета $t_1 \cdot t_2 = -9$. Следовательно, его корни разных знаков, т. е. один положительный, другой – отрицательный.

Таким образом, один из корней уравнения (2) (меньший корень) никогда не принадлежит промежутку $(1;\ 2]$, и нам осталось найти, при каких a этому промежутку не принадлежит больший корень.

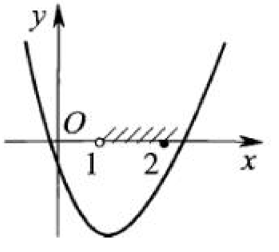


Рис. 1

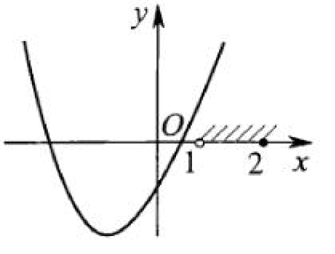


Рис. 2

Обозначим $f(t) = t^2 + (3 - a)t - 9$. Нарисуем график квадратного трехчлена $f(t)$, имеющего корни разных знаков. Легко видеть, что условию задачи удовлетворяют только параболы на рис. 1 и 2. В первом случае правая ветвь параболы проходит правее точки $x = 2$. Этот случай имеет место, если

$$f(2) < 0 \Leftrightarrow 2^2 + (3-a)\cdot 2 - 9 < 0 \Leftrightarrow a > \frac{1}{2}.$$

Во втором случае (рис. 2) правая ветвь параболы проходит левее точки $x = 1$ (или через саму эту точку). Это будет, если

$$f(1) \geq 0 \Leftrightarrow 1^2 + (3-a)\cdot 1 - 9 \geq 0 \Leftrightarrow a \leq -5.$$

Ответ: $a \in (-\infty;\ -5] \cup (0{,}5;\ +\infty)$.

Замечание. Ясно, что такое подробное решение на экзамене давать вовсе необязательно. Достаточно объяснить и обосновать только основные моменты. Мы же здесь изложили решение столь детально, чтобы были ясны все соображения, которые использовались при решении задачи.

Задача 2. Найдите все значения a, для которых при каждом значении x из промежутка $(-3;\ -1]$ значение выражения $x^4 - 8x^2 - 2$ не равно значению выражения ax^2.

Решение. Эта задача по своей формулировке аналогична задаче 1. И проведя те же рассуждения, что и в задаче 1, мы получим ответ. Но, чтобы расширить наш «арсенал» подходов к решению задач с параметрами, мы подойдем к ней чуть по-другому.

Итак, как и в предыдущей задаче, наша задача равносильна следующей: найти все значения a, при которых уравнение

$$x^4 - 8x^2 - 2 = ax^2 \tag{3}$$

не имеет решений на промежутке $(-3; -1]$.

Мы же сейчас найдем все a, при которых уравнение (3) имеет решения на промежутке $(-3; -1]$, а <u>ответом задачи будут все остальные a</u>.

Обозначим $t = x^2$. Так как $x \in (-3; -1]$, то t заключено в пределах $[1; 9)$. Теперь уравнение (3) можно записать в виде

$$t^2 - 8t - 2 = at \qquad \text{или} \qquad t^2 - (a+8)t - 2 = 0\,. \tag{4}$$

и наша задача свелась к следующей: найти все a, при которых уравнение (4) имеет хотя бы один корень в промежутке $[1; 9)$. Так как свободный член уравнения (4) – отрицательный, то оно всегда имеет два корня, причем корни разных знаков (см. решение задачи 1). Обозначим $f(t) = t^2 - (a+8)t - 2$.

Нарисуем график квадратного трехчлена $f(t)$, имеющего корни разных знаков. Легко видеть, что нам подходит только один случай, изображенный на рис. 3, когда правая ветвь пересекает ось Ot в промежутке $[1; 9)$.

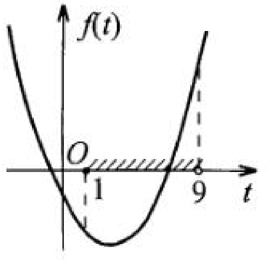


Рис. 3

Этот случай описывается системой неравенств

$$\begin{cases} f(1) \le 0 \\ f(9) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-9; \frac{7}{9})\,.$$

Следовательно, решениями исходной задачи будут $a \in (-\infty; -9) \cup [\frac{7}{9}; +\infty)$.

Ответ: $a \in (-\infty; -9) \cup [\frac{7}{9}; +\infty)$.

Решим еще одну похожую задачу, но используем для ее решения метод сечений.

Задача 3. Найти все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[-5; -1)$ значение выражения $(a+4)\,|x|$ не равно значению выражения x^2-3.

Решение. Наша задача равносильна следующей: найти все значении a, при которых уравнение

$$x^2-3=(a+4)\,|\,x\,| \qquad (5)$$

не имеет решений на промежутке $[-5; -1)$. Обозначим $y_1=x^2-3$ и $y_2=(a+4)\,|\,x\,|$. Нарисуем параболу $y_1=x^2-3$ и возьмем ту ее часть, которая расположена на промежутке $[-5; -1)$. На рис. 4 эта часть параболы изображена жирной линией. Имеем, $y_1(-1)=-2$, а $y_1(-5)=22$.

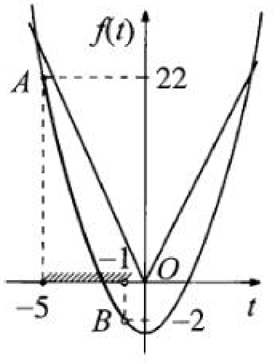


Рис. 4

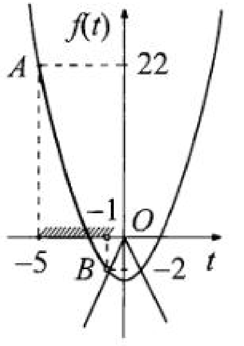


Рис. 5

Нарисуем теперь график $y_2=(a+4)\,|\,x\,|$. Рассмотрим три случая: $a+4>0$, $a+4<0$ и $a+4=0$.

1. $a+4>0$, т. е. $a>-4$. Тогда $y_2=(a+4)\,|\,x\,|$ представляет собой уголок, ветви которого направлены вверх, а вершина находится в точке $O\ (0;\ 0)$ (рис. 4). При этих a уравнение (5) не будет иметь решений, если уголок пройдет выше точки A (рис. 4). (В этом случае он не пересечется с участком параболы AB).

Последнее будет иметь место, если

$$y_2(-5)>22 \Leftrightarrow (a+4)\,|-5\,|>22 \Leftrightarrow 5a+20>22 \Leftrightarrow a>0{,}4\ .$$

2. $a + 4 < 0$. Тогда ветви уголка $y_2 = (a+4)|x|$ направлены вниз. И чтобы уравнение (5) не имело решений на промежутке $[-5; -1)$, график y_2 должен пройти ниже точки B или через саму точку B (рис. 5), а это будет, если

$$y_2(-1) \le -2 \Leftrightarrow (a+4)|-1| \le -2 \Leftrightarrow a \le -6 .$$

3. $a + 4 = 0$. В этом случае уравнение (5) имеет вид $x^2 - 3 = 0$. Один из корней этого уравнения $x_1 = -\sqrt{3}$ находится в промежутке $[-5; -1)$, а другой $x_2 = -\sqrt{3}$ – нет. Следовательно, $a = -4$ не удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a \in (-\infty; -6] \cup (0,4; +\infty)$.

Эти три примера ещё раз показывают, что многие задачи с параметрами могут быть решены несколькими способами, и право школьника выбирать, каким способом он будет решать предложенную на экзамене задачу.

Задача 4. Найти все значения параметра p, при каждом из которых уравнение

$$(1{,}5p-7)32^{0{,}4x+0{,}2} + (29p-154)0{,}125^{-\frac{x}{3}} + 11p - 41 = 0 \qquad (6)$$

имеет ровно $10p - p^2 - 24$ различных корней.

Некоторая нестандартность этой задачи состоит в том, что в ней число решений уравнения задается не конкретным числом, а значением выражения $10p - p^2 - 24$, зависящего от параметра p. Однако на решение задачи это обстоятельство особо не влияет.

План решения. Сначала мы покажем, что n – число решений уравнения (6) не превышает двух, т. е. n может быть равно 0, 1 или 2. С другой стороны, по условию задачи число решений уравнения (6) – равно $10p - p^2 - 24$. Поэтому, приравнивая это выражение последовательно к 0, 1 и 2, мы найдем соответствующие значения p, и затем проверим, какие из найденных значений p удовлетворяют всем условиям задачи. Реализуем сказанное.

Решение. Преобразуем левую часть исходного уравнения. Поскольку $32^{0{,}4x+0{,}2} = (2^5)^{0{,}4x+0{,}2} = 2^{2x+1} = 2 \cdot 4^x$ и $0{,}125^{-\frac{x}{3}} = (2^{-3})^{-\frac{x}{3}} = 2^x$, то уравнение (6) можно переписать в виде:

$$(3p-14)4^x+(29p-154)\cdot 2^x+11p-41=0. \quad (7)$$

Обозначим $t=2^x$, $t>0$. Тогда уравнение (7) примет вид:

$$(3p-14)t^2+(29p-154)t+11p-41=0. \quad (8)$$

При $3p+14\neq 0$ уравнение (8) – квадратное, при $3p+14=0$ оно линейное.

В любом из этих случаев оно имеет не более двух решений. Поэтому и исходное уравнение (7) имеет не более двух решений. Итак, число решений n исходного уравнения может быть равно 2, 1 или 0. Рассмотрим последовательно эти случаи.

а) Число решений $n=2$. Тогда $10p-p^2-24=2 \Leftrightarrow p^2-10p+26=0$. Дискриминант этого уравнения $D=-4<0$, поэтому этот случай невозможен.

б) Число решений $n=1$. Тогда $10p-p^2-24=1 \Leftrightarrow p^2-10p+25=0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow p=5$. Необходимо проверить, действительно ли при этом значении p исходное уравнение имеет одно решение. Подставив $p=5$ в уравнение (8), получаем квадратное уравнение $t^2-9t+14=0$. Его оба корня $t_1=2$, $t_2=7$ – положительны. Поэтому каждое из уравнений $2^x=2$ и $2^x=7$ имеет по одному решению. (Первое – $x=1$, второе $x=\log_2 7$). А это противоречит тому, что число решений $n=1$.

в) Число решений $n=0$. Тогда $10p-p^2-24=0 \Leftrightarrow p^2-10p+24=0$. Из последнего уравнения находим $p_1=4$, $p_2=6$. Подставим эти значения в уравнение (8).

При $p=4$ получаем уравнение $2t^2+38t-3=0$. Его корни $t_1=\dfrac{-38-\sqrt{1468}}{4}<0$ и $t_2=\dfrac{-38+\sqrt{1468}}{4}>0$. Поскольку $t_2>0$, то уравнение $2^x=t_2$ имеет решение, а это противоречит тому, что число решений $n=0$.

При $p=6$ получаем уравнение $4t^2+20t+25=0$, имеющее единственный корень $t=-\dfrac{5}{2}$. Но уравнение $2^x=-\dfrac{5}{2}$ не имеет решений, поэтому значение $p=6$ удовлетворяет всем условиям задачи.

Ответ: $p=6$.

Задача 5. Найти все значения параметра a, при которых уравнение

$$\sqrt{2x-6}+12x=4ax+8-2a \quad (9)$$

имеет ровно одно решение.

Решение. Обозначим $t=\sqrt{2x-6}$. Поскольку при всех допустимых x значение $\sqrt{2x-6}\geq 0$, то $t\geq 0$. Возводя равенство $t=\sqrt{2x-6}$ в квадрат, находим $x=\dfrac{t^2+6}{2}$. Подставляя найденное значение x в (9), получаем уравнение

$$(2a-6)t^2-t+10a-28=0. \tag{10}$$

Теперь наша задача свелась к следующей: найти все a, при которых уравнение (10) имеет единственное неотрицательное решение. Это возможно в трех случаях:

1. $2a-6=0$. Тогда уравнение (10) линейное и имеет одно решение. Надо только проверить, чтобы это решение было неотрицательным.

2. $2a-6\neq 0$, но $D=0$. В этом случае уравнение (10) также имеет одно решение, и тоже надо проверить, чтобы это решение было неотрицательным.

3. Уравнение (10) имеет два решения, но только одно из них неотрицательное.

Рассмотрим эти случаи подробно.

Случай 1. $2a-6=0 \Leftrightarrow a=3$. Подставляя $a=3$ в (10), получаем линейное уравнение $-t+2=0$, имеющее единственный корень $t=2>0$. Следовательно, значение $a=3$ удовлетворяет условиям задачи.

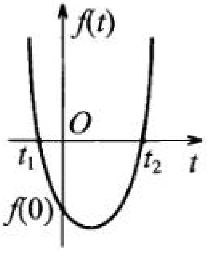


Рис. 6

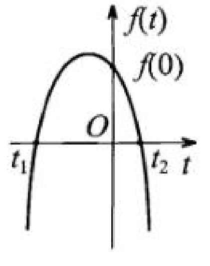


Рис. 7

Случай 2. $2a-6\neq 0$, $D=0$. Имеем,

$$D=(-1)^2-4(2a-6)(10a-8)=-80a^2+464a-671.$$

Решая уравнение $D=0$, находим $a_1=2{,}75$, $a_2=3{,}05$. Теперь надо подставить найденные значения a в уравнение (10) и проверить, имеет ли оно при этих a неотрицательные корни.

а) При $a=2{,}75$ уравнение (10) имеет вид:

$$0{,}5t^2+t+0{,}5=0 \Leftrightarrow t^2+2t+1=0.$$

Его единственный корень $t=-1<0$. Следовательно, $a=2{,}75$ нам не подходит.

б) При $a = 3{,}05$ уравнение (10) имеет вид:

$0{,}1t^2 - t + 2{,}5 = 0 \Leftrightarrow t^2 - 10t + 25 = 0.$

Его единственный корень $t = 5 > 0$. Следовательно, $a = 3{,}05$ нам подходит.

Случай 3. Уравнение (10) имеет два корня t_1 и t_2, но только один из них неотрицательный, другой отрицательный. Рассмотрим отдельно случаи $2a - 6 > 0$ и $2a - 6 < 0$.

а) При $2a - 6 > 0$ квадратный трехчлен $f(t) = (2a - 6)t^2 - t + 10a - 28$ будет иметь один корень $t_1 \geq 0$, другой $t_2 < 0$, если (рис. 6):

$$\begin{cases} 2a-6>0 \\ f(0)\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-6>0 \\ 10a-28\leq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in\varnothing \ .$$

б) При $2a - 6 < 0$ корни t_1 и t_2 квадратного трехчлена $f(t)$ будут удовлетворять условию $t_1 \geq 0$, $t_2 < 0$ (рис. 7), если

$$\begin{cases} 2a-6<0 \\ f(0)\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2a-6<0 \\ 10a-28\geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in[2{,}8;\ 3) \ .$$

Объединяя результаты, найденные в случаях 1–3, получим

Ответ: $a \in [2{,}8;\ 3] \cup \{3{,}05\}$.

Замечание. В этом уравнении мы заменой переменной $t = \sqrt{2x-6}$ сразу свели иррациональное уравнение к квадратному, которое исследуется гораздо проще. Этот прием очень эффективен и часто используется при решении уравнений и неравенств, содержащих радикалы.

Задача 6. Найти все значения параметра b, при которых система неравенств

$$\begin{cases} b^3 - b\cos(2x+2y) > 3b^2 + 8b + (b^2 - b)\sin(x+y) \\ x^4 + (b^4+1)y^2 - b > 2xy \end{cases} .$$

выполняется при любых x и y.

Решение. Рассмотрим сначала второе уравнение системы. Перепишем его в виде:

$$x^2 + y^2 - 2xy + b^4y^2 > b \ \Leftrightarrow\ (x-y)^2 + b^4y^2 > b \ .$$

Так как это неравенство должно выполняться при любых x и y, то должно быть $b < 0$. В противном случае при $x = y = 0$ оно не будет выполняться. При $b < 0$ второе неравенство выполняется при любых x и y.

Рассмотрим первое неравенство. Так как $b<0$, то, сократив обе части этого неравенства на b и поменяв знак, получим равносильное неравенство

$$b^2-\cos(2x+2y)<3b+8+(b-1)\sin(x+y) \quad . \tag{11}$$

Разложим $\cos(2x+2y)=\cos 2(x+y)$ как косинус двойного угла. Имеем

$$\cos 2(x+y)=\cos^2(x+y)-\sin^2(x+y)=1-2\sin^2(x+y) \ .$$

Подставив последнее выражение в (11), получим

$$2\sin^2(x+y)-(b-1)\sin(x+y)+b^2-3b-9<0.$$

Обозначим $t=\sin(x+y)$, $-1\le t\le 1$. Тогда последнее неравенство примет вид:

$$2t^2-(b-1)t+b^2-3b-9<0. \tag{12}$$

Теперь задача свелась к нахождению таких значений b, при которых квадратное неравенство (12) выполняется при всех $t\in[-1;\ 1]$.

Обозначим $f(t)=2t^2-(b-1)t+b^2-3b-9<0$. Ветви квадратного трехчлена $f(t)$ направлены вверх, поэтому неравенство (12) будет выполняться при всех $t\in[-1;\ 1]$, если (рис. 8)

$$\begin{cases} f(-1)<0 \\ f(1)<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(-1)=2\cdot(-1)^2-(b-1)(-1)+b^2-3b-9<0 \\ f(1)=2\cdot 1^2-(b-1)\cdot 1+b^2-3b-9<0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} b^2-2b-8<0 \\ b^2-4b-6<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} b\in(2-\sqrt{10};\ 2+\sqrt{10}) \\ b\in(-2;\ 4) \end{cases} .$$

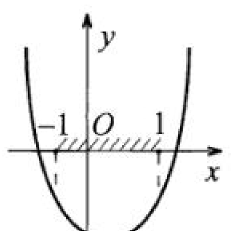


Рис. 8

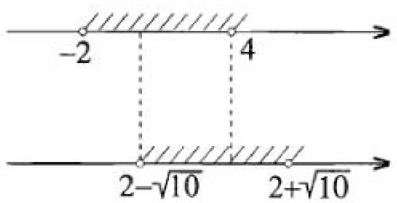


Рис. 9

Изобразив найденные множества на числовых осях (рис. 9), легко видеть, что решением системы будут $b\in(2-\sqrt{10};\ 4)$. Но, учитывая, что $b<0$, получаем

Ответ: $b\in(2-\sqrt{10};\ 0)$.

Решения следующих трех задач основано на использовании свойств монотонных функций при определении числа решений уравнений. Напомним основные определения и факты о монотонных функциях.

Определение 1. Функция $f(x)$ называется монотонно-возрастающей (монотонно-убывающей) на некотором промежутке, если для любых x_1 и x_2 из этого промежутка, таких, что $x_1 < x_2$, следует $f(x_1) < f(x_2)$ (соответственно $f(x_1) > f(x_2)$).

Говоря нестрого, возрастающие функции – это такие функции, у которых с ростом аргумента x растет и значение функции $f(x)$, а у убывающих функций с ростом x значение функции $f(x)$ убывает.

На рис. 10 и 11 приведены графики возрастающей и убывающей функций. График возрастающей функции при движении по нему слева направо становится все выше и выше (а у убывающей функции – все ниже и ниже). Естественно, это верно, если оси координат расположены обычным образом, как на рис. 10 и 11.

Если функция возрастает или убывает на некотором промежутке, говорят, что она монотонна на этом промежутке.

Следующие два утверждения будут для нас основными при решении задач.

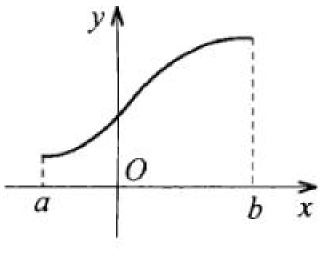


Рис. 10

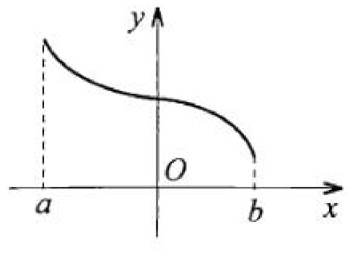


Рис. 11

Утверждение 1. Если функция $y = f(x)$ является монотонно-возрастающей (убывающей) на некотором промежутке, то при любом значении c уравнение $f(x) = c$ имеет не более одного решения на этом промежутке.

Это утверждение имеет простой наглядный смысл: горизонтальная прямая $y = c$ пересекает график монотонной функции $y = f(x)$ не более чем в одной точке (т. е. либо вообще его не пересекает, либо пересекает в единственной точке).

На рис. 12 прямая $y = c$ пересекает график возрастающей функции $y = f(x)$ в единственной точке x_0. На рис. 13 прямая $y = c$ не пересекает график $y = f(x)$: число c не принадлежит области значений $[y_1; y_2]$ функции $y = f(x)$ и, следовательно, уравнение $f(x) = c$ при данном значении c

не имеет решений. Аналогичная картина имеет место, когда $y = f(x)$ убывающая функция. Соответствующие графики нарисуйте самостоятельно.

Утверждение 2. Если $f(x)$ – монотонно-возрастающая, а $g(x)$ – монотонно-убывающая функции, заданные на некотором промежутке, то уравнение $f(x) = g(x)$ имеет на этом промежутке не более одного решения.

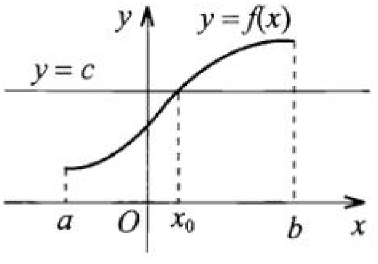


Рис. 12

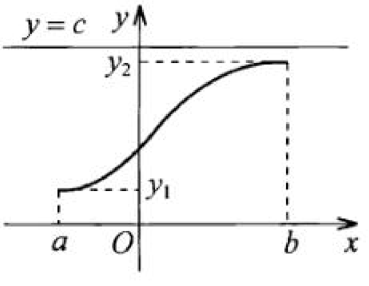


Рис. 13

Это утверждение также имеет наглядный геометрический смысл: графики возрастающей $y = f(x)$ и убывающей $y = g(x)$ функций пересекаются не более, чем в одной точке (рис. 14 и 15).

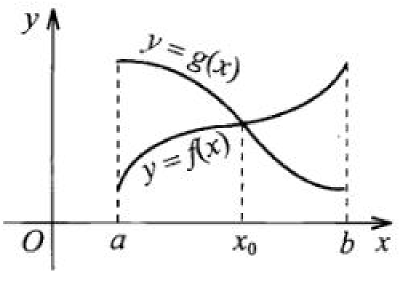


Рис. 14

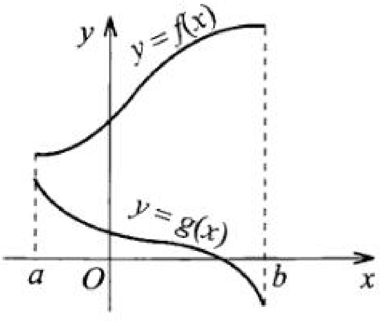


Рис. 15

Нам осталось разобраться, как же определить, является ли та или иная функция монотонной? Это можно сделать с помощью производной. В школьном курсе алгебры доказывается следующий факт: если производная функции $f(x)$ больше нуля во всех точках некоторого промежутка, то $f(x)$ возрастает на этом промежутке. Если производная меньше нуля во всех точках промежутка, $f(x)$ убывает на этом промежутке.

Сформулируем два утверждения о монотонных функциях, которые также позволяют определять монотонность тех или иных функций.

Утверждение 3. Если $f(x)$ и $g(x)$ монотонно-возрастающие (убывающие) функции, то $f(x) + g(x)$ также монотонно-возрастающая (соответственно, убывающая) функция. (Это утверждение, как легко видеть, справедливо для любого числа слагаемых.)

Утверждение 4. Если $f(x)$ – монотонно-возрастающая (убывающая) функция и $\alpha > 0$ – постоянная величина, то $\alpha \cdot f(x)$ – также монотонно-возрастающая (соответственно, убывающая функция).

Из этих утверждений сразу следует, что функция $f(x) = 3x + 7\sqrt{x} + \frac{1}{2}\log_2 x$ будет монотонно возрастающей на множестве $x > 0$, поскольку на этом множестве будут возрастающими функции x^3, $\sqrt{x}$ и $\log_2 x$. А функция $g(x) = -2x^3 + 6x^2 + 9(\frac{2}{5})^x + \frac{7}{x}$ будет монотонно-убывающей на множестве $x < 0$, т. к. на этом множестве будут убывающими функции: $-x^3$, x^2, $(\frac{2}{5})^x$, $\frac{1}{x}$.

Перейдем к задачам.

Задача 7. При каких значениях параметра a число решений уравнения

$$3x^2 + (9a^2 - 2)x + 3a^2 - 1 = 0 \tag{13}$$

не превосходит числа решений уравнения

$$3x^3 + x + (3a - 2)^2 \cdot 3^x = (8^a - 4)\log_3(3^a - \frac{1}{2}). \tag{14}$$

Решение. Рассмотрим сначала уравнение (14). Из него сразу следует, что допустимые значения параметра a должны удовлетворять условию $3^a - \frac{1}{2} > 0$. Правая часть уравнения (14) не зависит от x, поэтому при любом допустимом значении параметра a она является константой.

Левая часть уравнения (14) представляет собой возрастающую на всей числовой оси функцию $f(x) = 3x^3 + x + (3a - 2)^2 3^x$. Это сразу следует из утверждений 3 и 4, с учетом того, что x^3, x и 3^x – монотонно-возрастающие функции. [1] Следовательно, согласно утверждению 1, уравнение (14) при всех допустимых значениях параметра a имеет не более одного решения.

---

[1] В этом также легко убедиться, взяв производную $f'(x)$. Производная равна $f'(x) = 9x^2 + 1 + (3a - 2)^2 3^x \ln 3$. Очевидно, что $f'(x) > 0$ при всех $x \in R$. Следовательно, $f(x)$ возрастает на всей числовой прямой.

Поэтому, чтобы выполнялось условие задачи, квадратное уравнение (13) также должно иметь не более одного решения. А это будет, когда дискриминант D уравнения (13) будет ≤ 0. Имеем

$$D = (9a^2 - 2)^2 - 12(3a^2 - 1) = (9a^2 - 4)^2 \le 0.$$

Последнее неравенство выполняется только в случае $9a^2 - 4=0$, т. е. при $a = \frac{2}{3}$ и $a = -\frac{2}{3}$. Значение $a = -\frac{2}{3}$ не удовлетворяет условию $3^a - \frac{1}{2} > 0$. Действительно,

$$3^{-\frac{2}{3}} - \frac{1}{2} > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt[3]{9}} > \frac{1}{2} \Leftrightarrow (\frac{1}{\sqrt[3]{9}})^3 > (\frac{1}{2})^3 \Leftrightarrow \frac{1}{9} > \frac{1}{8},$$

что неверно.

Значение $a = \frac{2}{3}$ удовлетворяет условию $3^a - \frac{1}{2} > 0$. При этом значении a уравнение (14) принимает вид

$$x + 3x^3 = 0 .$$

Очевидно, оно имеет только одно решение $x = 0$. Таким образом, при $a = \frac{2}{3}$ оба уравнения (13) и (14) имеют одно решение. Следовательно, это значение a удовлетворяет условию задачи.

Ответ: $a = \frac{2}{3}$.

Задача 8. Даны два уравнения

$$\sqrt{(p^2 - 5p - 2)x} = 6p - 11 - 2x \tag{15}$$

и

$$(2 + 2^{\frac{p-2}{p-1}})^x = 89 - 2x . \tag{16}$$

Значение параметра $p \ne 1$ выбирается так, что при умножении числа различных корней первого уравнения на число различных корней второго уравнения получается число $3 - p$. Решите второе уравнение при каждом значении параметра p, выбранного таким образом.

Чтобы решение задачи было более прозрачным, сформулируем план решения этой задачи.

1. Прежде всего отметим, что число решений обоих уравнений связано с параметром p некоторым соотношением. Пусть k_1 – число решений пер-

вого уравнения, k_2 – число решений второго уравнения. Тогда по условию задачи

$$k_1 \cdot k_2 = 3 - p\,. \tag{17}$$

Заметим (хотя это и не используется в решении задачи), поскольку k_1 и k_2 – целые числа, то из равенства (17) следует, что значение p также целое.

2. Вторым шагом мы покажем, что уравнение (16) имеет одно решение при всех допустимых значениях параметра p, т. е. $k_2 = 1$. Доказательство этого основывается на утверждении 2 о монотонных функциях.

3. Третьим шагом мы покажем, что иррациональное уравнение (15) имеет не более двух решений, т. е. k_1 может равняться 0, 1 или 2.

4. Используя теперь, что $k_2 = 1$ и k_1 может равняться 0, 1 или 2, из соотношения $k_1 \cdot k_2 = 3 - p$ найдем, какие значения может принимать p.

5. И, наконец, при тех значениях p, <u>которые удовлетворяют всем условиям задачи</u>, найдем решения уравнения (16)

Несмотря на то, что план решения задачи довольно длинный, все его шаги достаточно естественны и очевидны. Реализуем сказанное.

Решение. 1 Число решений обоих уравнений связано с параметром p соотношением $k_1 \cdot k_2 = 3 - p$.

2. Покажем, что уравнение (16) при всех допустимых p имеет одно решение. Обозначим $a = 2 + 2^{\frac{p-2}{p-1}}$. Очевидно, $a > 1$. Следовательно, в левой части уравнения (16) стоит возрастающая на всей числовой прямой функция $f(x) = a^x$. В правой части этого уравнения стоит убывающая линейная функция $g(x) = 89 - 2x$, т. к. коэффициент при x отрицателен. Поэтому, воспользовавшись утверждением 2, заключаем, что число корней уравнения (16) равно 0 или 1.

Покажем теперь, что один корень всегда есть. Проще всего это сделать, нарисовав графики показательной функции $f(x) = a^x$ $(a > 1)$ и линейной функции $g(x) = 89 - 2x$ (рис. 16) и показать, что графики пересекаются. Возьмем две точки $x_1 = 0$ и $x_2 = 45$. В точке $x_1 = 0$ имеем $f(0) = 1$, $g(0) = 89$, т. е. $g(0) > f(0)$ (рис. 16), а в точке $x_2 = 45$ будет наоборот. Имеем, $g(45) = -1 < 0$, а $f(45) = a^{45} > 0$. Следовательно, $f(45) > g(45)$ (рис. 16). Таким образом, мы видим, что графики $y = f(x)$ и $y = g(x)$ пересекаются [1]. Поэтому уравнение (16) имеет ровно одно решение при всех допустимых значениях p, т. е. $k_2 = 1$.

3. Рассмотрим теперь иррациональное уравнение (15). После возведения обеих его частей в квадрат, мы получаем квадратное уравнение

$$(p^2 - 5p - 2)x + 24p - 39 = (6p - 11 - 2x)^2,$$

имеющее не более двух корней. Следовательно, и исходное уравнение (15) также имеет не более двух корней, т. е. $k_1 \le 2$.

4. Подставим в равенство $k_1 \cdot k_2 = 3 - p$ последовательно $k_1 = 0, 1, 2$ и учтем, что $k_2 = 1$. Имеем следующее.

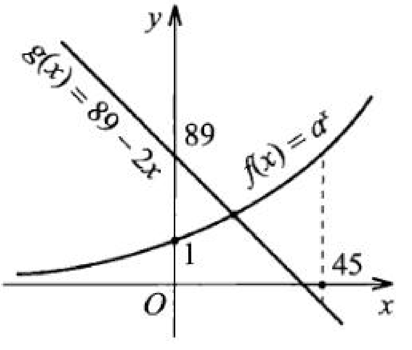


Рис. 16

а) При $k_1 = 0$, $k_2 = 1$ получаем $p = 3$. Подставляя $p = 3$ в уравнение (15), получаем $\sqrt{33-8x} = 7-2x$. Решая его (проделайте все выкладки самостоятельно), находим, что оно имеет корень $x = 1$. А это противоречит тому, что $k_1 = 0$.

б) При $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ получаем $p = 1$. Но это значение нам не подходит, т. к. по условию задачи $p \ne 1$.

в) При $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ находим $p = 2$. Подставляя $p = 2$ в уравнение (15), получаем

$$\sqrt{9-8x} = 1-2x.$$

Возведя обе части этого уравнения в квадрат, мы найдем его единственный корень $x = -2$. Таким образом, $p = 2$ удовлетворяет всем условиям задачи.

[1] Мы неявно воспользовались здесь тем, что $f(x)$ и $g(x)$ непрерывные функции. Поскольку это понятие в школьном курсе практически не изучается, то, как мы уже говорили ранее, можно опираться только на графики.

5. Осталось решить при этом значении p уравнение (16). Подставляя $p = 2$ в (16), получаем уравнение $3^x = 89 - 2x$. Подбором легко находится его корень $x = 4$. Других корней, как мы выяснили в пункте 2, это уравнение не имеет.

Ответ: $x = 4$.

Замечание. Метод подбора, который мы применили в этой задаче, это вполне законный метод решения уравнений, и многие нестандартные уравнения решаются только подбором. Но при этом обязательно должно быть доказано, что других решений нет.

Решим еще одну задачу, использующую свойства монотонных функций.

Задача 9. Найти все значения параметра p, при которых уравнение

$$(2p + 3)x^2 + (p + 3)x + 1 = 0 \tag{18}$$

имеет хотя бы один корень, и число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравнения

$$\frac{2x+1}{21-p} = \frac{1}{\sqrt{x-3}+3} \; . \tag{19}$$

Решение. 1. Заметим, что по условию задачи значения параметра p выбираются такие, при которых оба уравнения (18) и (19) имеют решения.

2. Рассмотрим уравнение (19). Покажем, что в левой его части стоит возрастающая функция, а в правой – убывающая.

а) Областью допустимых значений параметра будут все $p \neq 21$. Областью допустимых значений неизвестной будут $x \geq 3$.

б) При всех $x \geq 3$ правая часть уравнения (19) положительна. Кроме того, при этих же x выражение $2x + 1$ также положительно. Следовательно, чтобы выполнялось равенство (19), должно быть $21 - p > 0$, т. е. $p < 21$.

в) Обозначим $f(x) = \dfrac{2x+1}{21-p}$ и $g(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x-3}+3}$. Покажем, что $f(x)$ – возрастающая функция, а $g(x)$ – убывающая. Действительно, $f(x) = \dfrac{2x+1}{21-p} = \dfrac{2}{21-p}x + \dfrac{1}{21-p}$ – линейная функция с угловым коэффициентом $k = \dfrac{2}{21-p} > 0$. Следовательно, $f(x)$ – возрастающая функция.

Поскольку с ростом x растет знаменатель $\sqrt{x-3}+3$, то обратная величина $g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x-3}+3}$ будет уменьшаться. Следовательно $g(x)$ – убывающая функция.

Таким образом, мы показали, что в левой части уравнения (19) стоит возрастающая функция, а в правой – убывающая. Из этого следует (утверждение 2), что уравнение (19) имеет не более одного решения.

3. По условию задачи уравнение (19) имеет решения. Найдем те p, при которых имеется это единственное решение. На рис. 17 представлены эскизы графиков $f(x)$ и $g(x)$. Они будут пересекаться (а это и означает, что уравнение (19) имеет решение), если $f(3) \le g(3)$ (рис. 17). Имеем

$$f(3)=\frac{2\cdot 3+1}{21-p}=\frac{7}{21-p};\ g(3)=\frac{1}{3}.$$

Решив неравенство $\dfrac{7}{21-p}\le\dfrac{1}{3}$, получаем $p\le 0$. Итак, уравнение (19) имеет единственное решение при $p\le 0$.

4. Рассмотрим теперь уравнение (18). Поскольку по условию задачи число

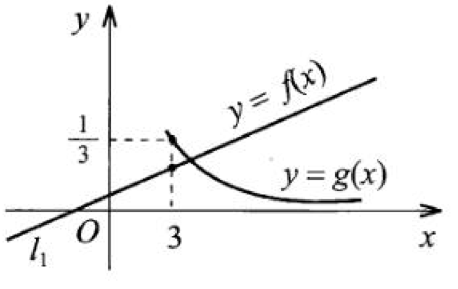


Рис. 17

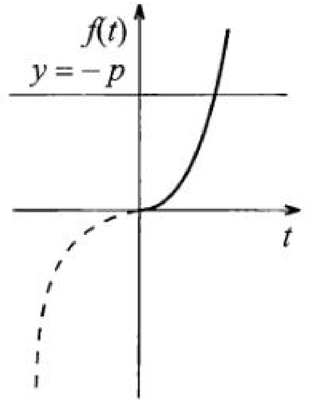


Рис. 18

решений уравнений (18) и (19) совпадает, то уравнение (18) должно иметь одно решение. А это может быть только в двух случаях:

а) $2p + 3 = 0$ б) $2p + 3 \ne 0$, $D = 0$.

Рассмотрим эти случаи подробно.

а) Если $2p + 3 = 0$, т. е. $p=-\dfrac{3}{2}$, то уравнение (18) имеет вид $1{,}5x + 1 = 0$. Его единственный корень $x=-\dfrac{2}{3}$. Следовательно, $p=-\dfrac{3}{2}$ удовлетворяет условию задачи.

б) $2p + 3 \neq 0$, $D = 0$. Дискриминант уравнения (19) $D = (p + 3)^2 - 4(2p + 3) = p^2 - 2p - 3 = 0$. Откуда находим $p_1 = 3$, $p_2 = -1$. Но условию $p \leq 0$ удовлетворяет только $p_2 = -1$.

Ответ: $p_1 = -\frac{3}{2}$, $p_2 = -1$.

Заметим, что уравнение (19) можно было исследовать и по-другому. Обозначим $t = \sqrt{x-3}$, $t \geq 0$. Тогда $x - 3 = t^2$, $x = t^2 + 3$, и второе уравнение можно записать в виде:

$$\frac{2t^2+7}{21-p} = \frac{1}{t+3} \Leftrightarrow (2t^2+7)(t+3) = 21-p \Leftrightarrow 2t^3+6t^2+7t = -p. \qquad (20)$$

Итак, задача свелась к исследованию решений кубичного уравнения (20) на множестве $t \geq 0$. Обозначив $f(t) = 2t^3+6t^2+7t$, с помощью производной легко исследовать функцию $f(t)$ и построить ее график. Имеем, $f'(t) = 6t^2 + 12t + 7$. Приравнивая производную к нулю, получаем $6t^2 + 12t + 7=0$. Дискриминант этого квадратного уравнения меньше нуля, поэтому $f'(t) > 0$ при всех t. Следовательно, функция $f(t)$ будет возрастающей на всей числовой прямой. Эскиз графика этой функции приведен на рис. 18. Нам нужна та его часть, которая расположена на множестве $t \geq 0$. На рис. 18 она нарисована сплошной линией. Так как, по условию задачи, уравнение (20) имеет решение, то должно быть пересечение графика $f(t)$ с прямой $y = -p$. А это будет только при $-p \geq 0 \Leftrightarrow p \leq 0$, причем это пересечение единственное. Таким образом, исходное уравнение (19) имеет один корень при $p \leq 0$.

Исследовав теперь уравнение (18) исходной задачи так же, как мы это сделали ранее, мы получим ответ.

Рассмотрим еще ряд задач.

Задача 10. При каких значениях a уравнение

$$a^2x^2 + 2a(\sqrt{2}-1)x + \sqrt{x-2} = 2\sqrt{2} - 3$$

имеет решения?

Решение. Перепишем уравнение в виде:

$$a^2x^2 + 2a(\sqrt{2}-1)x + 3 - 2\sqrt{2} + \sqrt{x-2} = 0.$$

Основная трудность в этой задаче – увидеть, что первые три слагаемые образуют полный квадрат:

$$a^2x^2+2a(\sqrt{2}-1)x+3-2\sqrt{2}=a^2x^2+2a(\sqrt{2}-1)x+(\sqrt{2}-1)^2=(ax+\sqrt{2}-1)^2.$$

Теперь исходное уравнение можно переписать так

$$(ax+\sqrt{2}-1)^2+\sqrt{x-2}=0.$$

Поскольку оба слагаемые в последнем уравнении – неотрицательные числа, то их сумма равна 0, когда каждое из слагаемых равно 0. Имеем систему:

$$\begin{cases}\sqrt{x-2}=0\\ ax+\sqrt{2}-1=0\end{cases}.$$

Из первого уравнения следует $x=2$. Подставляя это значение во второе уравнение, получаем $a=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Ответ: $a=\dfrac{1-\sqrt{2}}{2}$.

Задача 11. При каких a уравнение

$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right|+x^2-2x=1$$

имеет хотя бы одно решение?

Решение. Преобразуем исходное уравнение. Имеем

$$\left|\frac{x^2-4ax+4a^2+1}{x-2a}\right|+(x-1)^2=2 \Leftrightarrow \left|\frac{(x-2a)^2+1}{x-2a}\right|+(x-1)^2=2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \left|x-2a+\frac{1}{x-2a}\right|+(x-1)^2=2. \qquad (21)$$

Если обозначить $x-2a=t$, то $\left|x-2a+\dfrac{1}{x-2a}\right|=\left|t+\dfrac{1}{t}\right|$.

В главе 5 мы уже изучали функцию $f(t)=t+\dfrac{1}{t}$. Мы показали, что при любых $t>0$ выполняется неравенство $t+\dfrac{1}{t}\geq 2$, при этом равенство имеет место только при $t=1$. А при $t<0$ выполняется неравенство $t+\dfrac{1}{t}\leq -2$, при этом равенство имеет место только при $t=-1$. Следовательно, и при $t > 0$, и при $t < 0$ будет выполняться неравенство $\left|t+\frac{1}{t}\right| \geq 2$.

При этом равенство будет достигаться только при $t = 1$ и $t = -1$.

Возвращаясь теперь к прежним обозначениям $x - 2a = t$, мы видим, что при всех допустимых значениях x и a выполняется неравенство

$$\left|x-2a+\frac{1}{x-2a}\right| \geq 2 .$$

Следовательно, чтобы выполнялось равенство (21), должно быть

$$\left|x-2a+\frac{1}{x-2a}\right| = 2 \quad \text{и} \quad (x-1)^2 = 0 .$$

А это будет в двух случаях:

$$1. \begin{cases} x-2a=1 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases}; \qquad 2. \begin{cases} x-2a=-1 \\ (x-1)^2 = 0 \end{cases}.$$

Решая эти системы, находим

Ответ: $a = 0$, $a = 1$.

Задача 12. Найти все значения a, при которых существуют четыре натуральных числа x, y, u и v, удовлетворяющие системе уравнений

$$\begin{cases} xy(40+xy) = (150-a)(a-90) \\ a(8u^2+18v^2-a) = (4u^2-9v^2)^2 \end{cases}. \tag{22}$$

В этой задаче речь идет о положительных целочисленных решениях системы. И хотя система (22) содержит 4 неизвестных x, y, u, v и параметр a, но условие целочисленности резко ограничивает число допустимых значений параметра a. Как мы увидим далее, существует только одно значение параметра, удовлетворяющее условиям задачи.

Решение. Раскрыв скобки, перепишем второе уравнение

$$a^2 - 2(4u^2+9v^2)a + (4u^2-9v^2)^2 = 0.$$

Рассмотрим последнее уравнение как квадратное относительно параметра a и найдем его дискриминант. Имеем

$$\mathrm{D} = 4(4u^2+9v^2)^2 - 4\cdot 1\cdot(4u^2-9v^2)^2 = 576u^2v^2 .$$

Теперь легко находим два корня:

или

$$a = \frac{2(4u^2 + 9v^2) - 24uv}{2} = (2u - 3v)^2 . \qquad (24)$$

Из этих равенств видно, что a является квадратом целого числа (по условию u и v – целые!).

С другой стороны, из первого уравнения, в силу того, что x и y – натуральные числа, следует, что $xy(40 + xy) > 0$. Поэтому, чтобы выполнялось первое уравнение, должно быть $(150 - a)(a - 90) > 0$. Откуда находим, что $90 < a < 150$. Но в этом промежутке существуют лишь три числа, являющиеся точными квадратами: это $a = 144$, $a = 121$ и $a = 100$. Подставим последовательно эти значения в первое уравнение системы.

1. $a = 144$. Тогда первое уравнение исходной системы имеет вид $xy(40 + xy) = 324 \Leftrightarrow (xy)^2 + 40xy - 324 = 0$.

Обозначив $xy = t$, получим квадратное уравнение $t^2 + 40t - 324 = 0$, корни которого $t_1 = -20 + \sqrt{724}$; $t_2 = -20 - \sqrt{724}$.

Следовательно, $a = 144$ не удовлетворяет условию задачи, т. к. ни при каких натуральных x и y не выполняются равенства $xy = -20 \pm \sqrt{724}$.

2. Значение $a = 121$ не подходит по той же причине. (Проверьте самостоятельно.)

3. При $a = 100$ первое уравнение исходной системы имеет вид $xy(40 + xy) = 500 \Leftrightarrow (xy)^2 + 40xy - 500 = 0$.

Откуда легко находим, что $xy = 10$. Этому уравнению удовлетворяет, например, пара чисел $x = 2$, $y = 5$.

Осталось проверить, удовлетворяет ли $a = 100$ второму уравнению.

Согласно (23) и (24), должно выполняться хотя бы одно из соотношений $(2u + 3v)^2 = 100$ или $(2u - 3v)^2 = 100$. Легко видеть, что первое соотношение выполняется при $u = 2$, $v = 2$.

Таким образом, при $a = 100$ исходная система имеет вид:

$$\begin{cases} xy(40 + xy) = 500 \\ 100(8u^2 + 18v^2 - 100) = (4u^2 - 9v^2)^2 \end{cases} . \qquad (25)$$

Ей удовлетворяют четыре числа $x = 2$, $y = 5$, $u = 2$, $v = 2$.

Ответ: $a = 100$.

Замечание. Конечно, система (22) имеет кроме указанного нами и другие решения. Но по условию задачи нам надо искать не решения системы, а значения параметра a, при которых имеется решение в натуральных числах. Мы нашли, что a может равняться только 100 и указали одно из таких решений. Следовательно, задача решена.

Задача 13. Найти все значения параметра a, при которых множество решений неравенства

$$\frac{25-(a+10)x}{x^2} < \frac{5a}{x^2}\left(\frac{5}{x}-2\right)-1 \qquad (26)$$

содержит число 6, а также содержит два непересекающихся отрезка длины 6.

Решение. Сначала решим исходное неравенство. Перенесем все его члены в левую часть и приведем к общему знаменателю. Имеем

$$\frac{x^3-ax^2-10x^2+10ax+25x-25a}{x^3}<0.$$

Сейчас главное – это увидеть, что числитель нашей дроби раскладывается на множители. Действительно, сгруппировав члены числителя: первый со вторым, третий с четвертым, пятый с шестым, получим

$$\frac{x^2(x-a)-10x(x-a)+25(x-a)}{x^3}<0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{(x-a)(x^2-10x+25)}{x^3}<0 \Leftrightarrow \frac{(x-a)(x-5)^2}{x^3}<0. \qquad (27)$$

Последнее неравенство легко решается методом интервалов. Корни числителя $x_1=a$, $x_2=5$. Корень знаменателя $x=0$. Рассмотрим отдельно различные случаи расположения точки $x=a$ относительно двух других точек $x=0$ и $x=5$.

Случай 1. $a<0$. Тогда знаки неравенства показаны на рис. 19 и решением неравенства будет промежуток $(a;\,0)$.

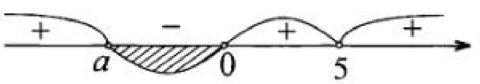


Рис. 19

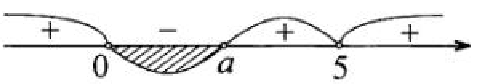


Рис. 20

Этот промежуток не содержит в качестве решения точку $x=6$, поэтому этот случай нам не подходит. (Заметим, поскольку в неравенстве (27) сомножитель $x-5$ стоит в квадрате, то в точке $x=5$ неравенство не меняет знак!)

Случай 2. $a=0$. Тогда неравенство (27) имеет вид:

$$\frac{x(x-5)^2}{x^3}<0 \Leftrightarrow \frac{(x-5)^2}{x^2}<0.$$

Очевидно, что последнее неравенство решений не имеет.

Случай 3. $0<a<5$ (рис. 20). Решением неравенства в этом случае будет

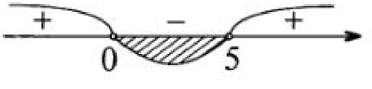


Рис. 21

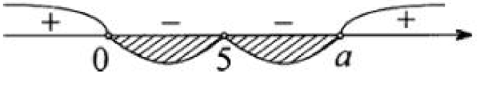


Рис. 22

промежуток $(0;\ a)$. Он также не содержит точки $x=6$.

Случай 4. $a=5$. Тогда неравенство (29) имеет вид $\dfrac{(x-5)^3}{x^3}<0$. Его решением будет промежуток $(0;\ 5)$ (рис. 21). Этот промежуток также не содержит точку $x=6$.

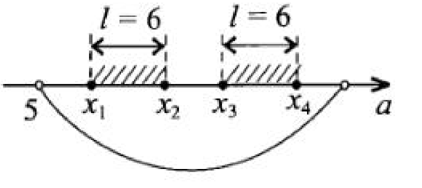


Рис. 23

Случай 5. $a>5$ (рис. 22). Тогда решением неравенства будет объединение промежутков $(0;5)\cup(5;a)$. Чтобы это множество содержало точку $x=6$, должно быть $a>6$.

Разберемся теперь с отрезками длины 6. Так как длина интервала $(0;\ 5)$ равна 5, то он не может содержать отрезок длины 6. Поэтому непересекающиеся отрезки длины 6 могут располагаться только в интервале $(5;\ a)$.

На рис. 23 показаны два отрезка длины 6, расположенные в промежутке $(5;\ a)$. Это возможно в том и только в том случае, когда длина интервала $(5;\ a)$ больше 12, т. е. когда $a>17$.

Ответ: $a>17$.

Замечание. Конечно, можно было рассмотреть меньшее число случаев, объединив некоторые случаи в один. Но в условиях экзамена из-за возможных ошибок лучше рассматривать все случаи раздельно. Это займет немногим больше времени, но позволит избежать ошибок.

В следующих двух задачах основная идея решения состоит в исследовании множества значений рассматриваемых в задаче функций.

Задача 14. При каких значениях a неравенство

$$\frac{x^2-6x+14-a}{a-2\sin x-1}\le 0$$

не имеет решений.

Решение. Будем рассуждать стандартно.

1. Наше неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}x^2-6x+14-a\ge 0\\ a-2\sin x-1<0\end{cases};\ (1)\qquad \begin{cases}x^2-6x+14-a\le 0\\ a-2\sin x-1>0\end{cases}.\ (2)$$

Нам надо найти такие a, при которых ни одна их этих систем не имеет решений.

2. Найдем множество значений функций $y_1=x^2-6x+14$ и $y_2=2\sin x+1$, входящих в эти системы, и нарисуем их графики. Имеем $y_1=x^2-6x+14$, $x_в=3$, $y_в=3^2-6\cdot 3+14=5$. Следовательно, множество значений $E(y_1)=[5;+\infty)$.

Так как $-1\le \sin x\le 1$, то $-2\le 2\sin x\le 2$ и $-1\le 2\sin x+1\le 3$, $E(y_2)=[-1;3]$. Графики функций y_1 и y_2 представлены на рис. 24. Мы видим, что множества значений $E(y_1)$ и $E(y_2)$ не пересекаются. Более того, $E(y_1)$ на числовой оси Oy находится выше, чем $E(y_2)$.

3. Рассмотрим первую систему. Перепишем ее в виде:

$$\begin{cases}x^2-6x+14\ge a\\ 2\sin x+1>a\end{cases}\quad \text{или}\quad \begin{cases}y_1\ge a\\ y_2>a\end{cases}.$$

Рассмотрим теперь два случая: $a<3$ и $a\ge 3$.

а) Если $a<3$ (на рис. 24 прямая l_1), то система имеет решения, поскольку неравенство $y_1\ge a$ выполняется при всех $x\in \boldsymbol{R}$ и существуют значения x, при которых выполняется второе неравенство.

б) Если $a\ge 3$, то второе неравенство системы не имеет решений (рис. 24, прямые l_2 и l_4). Следовательно, и система не имеет решений.

Итак, первая система не имеет решений при $a\in[3;+\infty)$.

4. Рассмотрим вторую систему. Перепишем ее в виде:

$$\begin{cases} x^2-6x+14\le a \\ 2\sin x+1<a \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} y_1\le a \\ y_2<a \end{cases}.$$

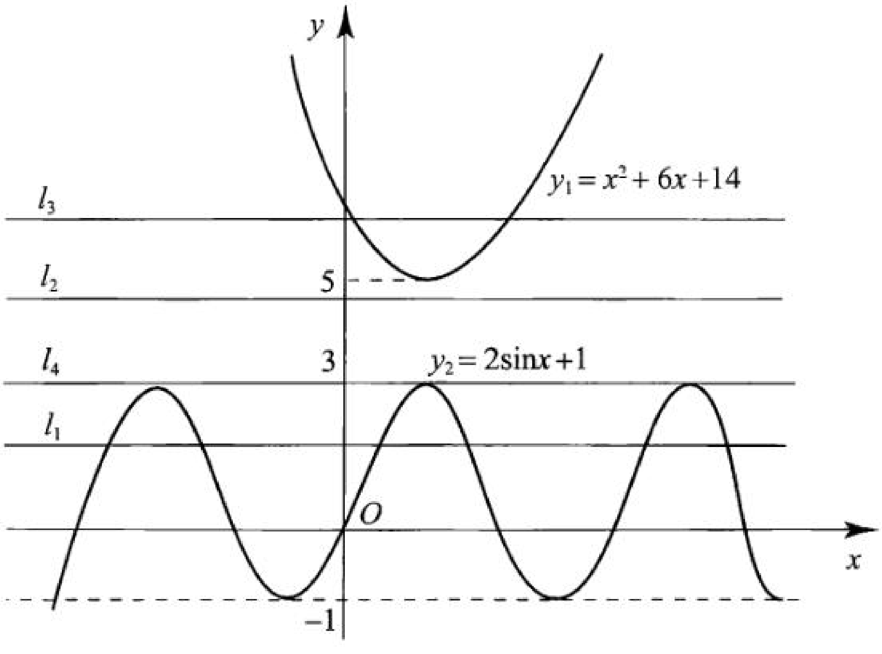


Рис. 24

Воспользовавшись тем же рис. 24, легко видеть следующее.

а) При $a \ge 5$ (прямая l_3) оба неравенства второй системы имеют решения.

б) При $a < 5$ (рис. 24, прямые l_1, l_2 и l_4) первое неравенство системы не имеет решений, следовательно, не имеет решений и система. Итак, вторая система не имеет решений при $a \in (-\infty;5)$.

Решением задачи будет пересечение множеств $[3;+\infty)$ и $(-\infty;5)$, т. е. промежуток $[3;5)$.

Ответ: $[3;5)$.

Задача 15. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых неравенство

$$\frac{(2^x+3\sqrt{3}\cdot 2^{-x}-6)-a}{(3\cos x-5)-a} \ge a$$

не имеет решений.

По своей формулировке эта задача аналогична предыдущей. Единственная трудность по сравнению с предыдущей задачей состоит в нахождении множества значений функции, стоящей в числителе.

Решение. 1. Наше неравенство равносильно совокупности двух систем:

$$\begin{cases}(2^x+3\sqrt{3}\cdot 2^{-x}-6)-a\ge 0\\(3\cos x-5)-a>0\end{cases};\ (1)\qquad \begin{cases}(2^x+3\sqrt{3}\cdot 2^{-x}-6)-a\le 0\\(3\cos x-5)-a<0\end{cases}.\ (2)$$

Теперь исходная задача может быть переформулирована так: найти все значения a, при которых ни одна из этих систем не имеет решений.

2. Найдем для функций $y_1=2^x+\dfrac{3\sqrt{3}}{2^x}-6$ и $y_2=3\cos x-5$ множество значений.

а) Поскольку $-1\le\cos x\le 1$, то $-8\le 3\cos x-5\le -2$, . Следовательно, множество значений $E(y_2)=[-8;-2]$.

б) Найдем множество значений y_1. Это можно сделать стандартным путем с помощью производной. Но можно воспользоваться неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим двух чисел. (см. главу 5, формула (24)). Имеем:

$$2^x+\frac{3\sqrt{3}}{2^x}\ge 2\sqrt{2^x\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2^x}}=2\sqrt{3\sqrt{3}}=2\sqrt[4]{27}.$$

Итак, наименьшее значение функции $h(x)=2^x+\dfrac{3\sqrt{3}}{2^x}$ равно $2\sqrt[4]{27}$.

Так как с ростом x величина 2^x неограниченно растет, то $E(h)=[2\sqrt[4]{27};+\infty)$. А поскольку $y_1=h(x)-6$, то $E(y_1)=[2\sqrt[4]{27}-6;+\infty)$. Осталось оценить число $2\sqrt[4]{27}-6$.

Имеем $2<\sqrt[4]{27}<3\Rightarrow 4<2\sqrt[4]{27}<6\Rightarrow -2<2\sqrt[4]{27}-6<0$. Графики функций y_1 и y_2 изображены на рис. 25.

Мы видим, что множество $E(y_1)$ на оси Oy находится выше множества $E(y_2)$, аналогично тому, как это было в предыдущей задаче.

3. Рассмотрим первую систему. Запишем ее в виде:

$$\begin{cases}(2^x+3\sqrt{3}\cdot 2^{-x}-6)\ge a\\(3\cos x-5)>a\end{cases}\quad\text{или}\quad\begin{cases}y_1\ge a\\y_2>a\end{cases}.$$

Рассуждая так же, как и в задаче 14, находим, что она не имеет решений при $a\ge -2$. (При этих a не выполняется $y_2>a$.) При остальных a система имеет решения.

4. Рассмотрим вторую систему. Перепишем ее в виде:

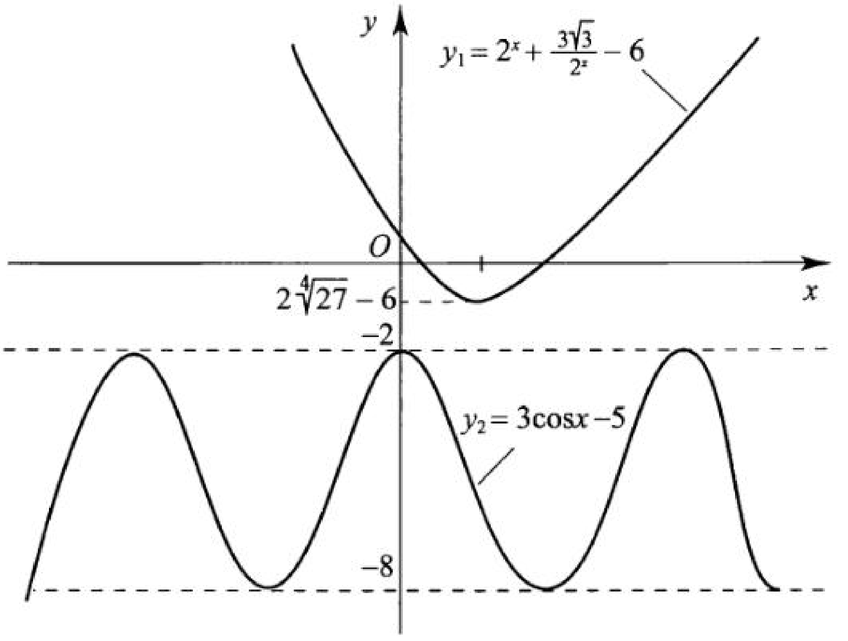


Рис. 25

$$\begin{cases}(2^x + 3\sqrt{3}\cdot 2^{-x} - 6) \le a \\ (3\cos x - 5) < a\end{cases} \text{ или } \begin{cases} y_1 \le a \\ y_2 < a\end{cases}.$$

Она не имеет решений при $a < 2\sqrt[4]{27} - 6$. Беря теперь пересечение множеств $a < 2\sqrt[4]{27} - 6$ и $a \ge -2$ (рис. 26), получаем промежуток $[-2; 2\sqrt[4]{27} - 6)$. Это и есть те a, при которых ни одна из систем не имеет решений.

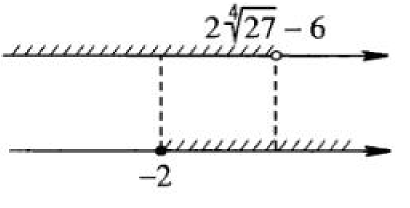


Рис. 26

Ответ: $a \in [-2; 2\sqrt[4]{27} - 6)$.

Задача 16. Найти все значения a такие, что для любого x выполняется неравенство $|x+1| + 2|x+a| > 3 - 2x$.

Решение. Представим исходное неравенство в виде

$$3-2x-|x+1|<2|x+a|$$

и нарисуем графики функций $f(x)=3-2x-|x+1|$ и $g(x)=2|x+a|$. Раскрыв знак модуля у функции $f(x)$, получаем:

$$f(x)=\begin{cases}-3x+2 & \text{при } x\geq -1\\ -x+4 & \text{при } x\leq -1\end{cases}.$$

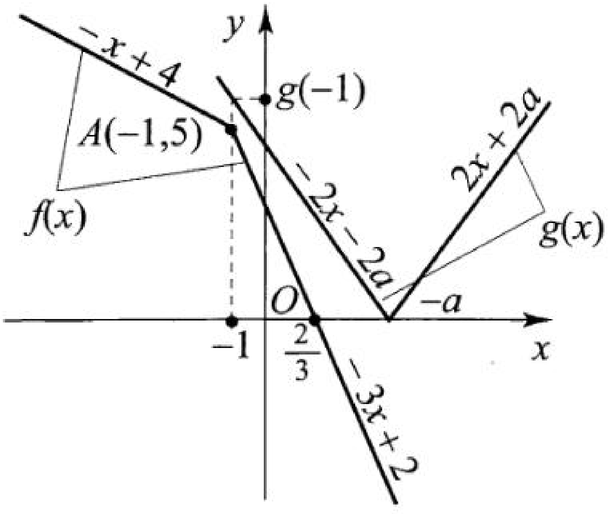


Рис. 27

График $f(x)$ представлен на рис. 27. Имеем $f(-1)=5$. $f(x)=0\Leftrightarrow -3x+2=0\Leftrightarrow x=\frac{2}{3}$ - точка, в которой функция $f(x)$ пересекает ось абсцисс. График $g(x)=2|x+a|$ представляет собой уголок с вершиной в точке $x=-a$ (рис. 27).

Чтобы исходное неравенство выполнялось при всех x, график функции $g(x)$ должен быть при всех x выше графика $f(x)$. А это будет, если вершина $x=-a$ будет правее точки $x=\frac{2}{3}$ и левая ветвь уголка $g(x)=-2x-2a$ будет выше вершины $A(-1;5)$. Имеем систему:

$$\begin{cases}x_в>\frac{2}{3}\\ g(-1)>-5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-a>\frac{2}{3}\\ g(-1)=-2(-1)-2a>5\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}a<-\frac{2}{3}\\ a<-\frac{3}{2}\end{cases}\Leftrightarrow a<-\frac{3}{2}.$$

Ответ: $a < -\frac{3}{2}$.

Для решения следующих задач сформулируем несколько достаточно очевидных , но очень полезных при решении задач, утверждений. Обоснуйте их самостоятельно.

Пусть функция $f(x)$ задана на некотором промежутке и $f_{наим}$ — её наименьшее значение на этом промежутке. Тогда:

1. условие того, что наименьшее значение функции $f(x)$ больше числа c, равносильно тому , что неравенство $f(x) > c$ выполняется при всех x из этого промежутка;

2. условие того, что наименьшее значение функции $f(x)$ меньше числа c, равносильно тому, что неравенство $f(x) < c$ выполняется хотя бы при одном значении x.

Аналогично, если $f_{наиб}$ есть наибольшее значение функции на некотором промежутке. Тогда:

3. условие того, что наибольшее значение функции $f(x)$ меньше числа c, равносильно тому, что неравенство $f(x) < c$ выполняется при всех x из этого промежутка;

4. условие того, что наибольшее значение функции $f(x)$ больше числа c, равносильно тому, что неравенство $f(x) > c$ выполняется хотя бы при одном значении x.

Задача 17. Найти все значения параметра a, для которых наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 2x - 1 + |x - a|$ больше 2.

Решение. Итак, если наименьшее значение функции $f(x) = x^2 + 2x - 1 + |x - a|$ больше 2, то согласно сформулированному выше утверждению 1 это равносильно тому, что неравенство $f(x) = x^2 + 2x - 1 + |x - a| > 2$ выполняется при всех x. Таким образом, нам надо найти все значения a, при которых неравенство $f(x) = x^2 + 2x - 1 + |x - a| > 2$ выполняется при всех x. Перепишем полученное неравенство в виде $|x - a| > -x^2 - 2x + 3$. Нарисуем графики функций $y_1 = |x - a|$ и $y_2 = -x^2 - 2x + 3$ (рис. 28). Теперь задача свелась к нахождению значений a, при которых уголок y_1 находится выше параболы

y_2. Это будет в том и только в том случае, когда вершина уголка y_1 не принадлежит отрезку $[a_1;a_2]$

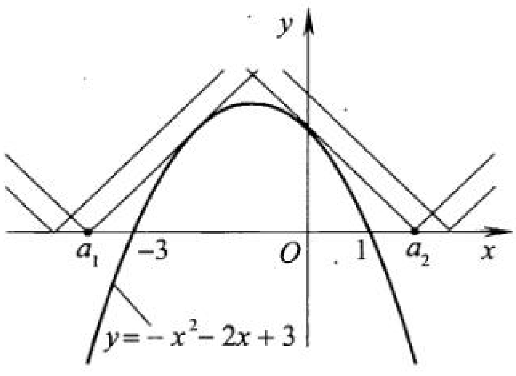


Рис. 28

Значение a_1 определяется касанием правой ветви уголка $y_1=|x-a|$ параболы $y_2=-x^2-2x+3$. Это будет, когда уравнение $x-a=-x^2-2x+3 \Leftrightarrow x^2+3x+3-a=0$ имеет одно решение. Приравняв D = 0, находим $a_1=-\frac{21}{4}$. Аналогично, точка a_2 определяется касанием левой ветви уголка $y_1=|x-a|$ параболы y_2. Имеем $a-x=-x^2-2x+3 \Leftrightarrow x^2+x+a-3=0$. Приравняв $\mathrm{D}=13-4a=0$, находим $a_2=\frac{13}{4}$. Итак, промежуток $[a_1;a_2]$ есть $\left[-\frac{21}{4};\frac{13}{4}\right]$, а ответом будут все остальные a, не принадлежащие этому промежутку.

Ответ: $a\in\left(-\infty;-\frac{21}{4}\right)\cup\left(\frac{13}{4};+\infty\right)$.

Замечание. Эту задачу, конечно, можно решить и чисто аналитически, раскрывая знак модуля и исследуя точки, в которых может достигаться наименьшее значение.

Задача 18. Найти значения параметра a, при которых наименьшее значение функции $f(x)=4|x-a|+|x^2+2x-3|$ меньше 4.

Решение. Согласно утверждению 2, задача равносильна следующей: найти все a, при которых неравенство $f(x)=4|x-a|+|x^2+2x-3|<4$ выполняется хотя бы для одного значения x.

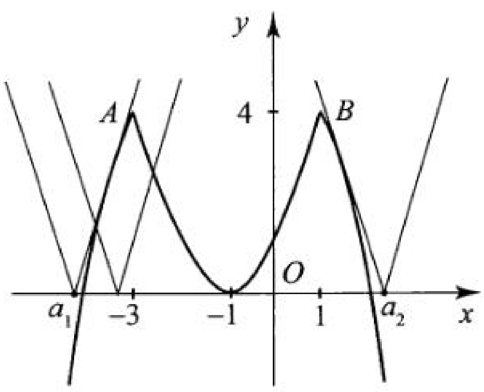


Рис. 29

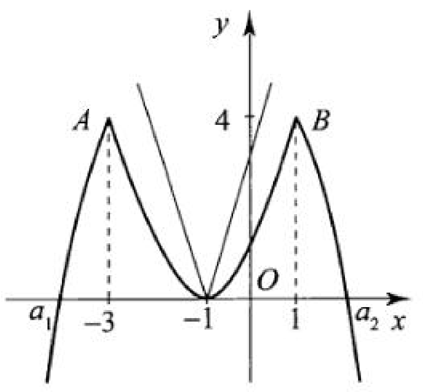


Рис. 30

Перепишем последнее неравенство в виде $4|x-a|< 4-|x^2+2x-3|$. Нарисуем графики $y_1=4|x-a|$ и $y_2=4-|x^2+2x-3|$ (рис. 29). Раскрыв знак модуля у функции y_2, получаем

$$y_2=\begin{cases}-x^2-2x+7 & \text{при } x\in(-\infty;-3]\cup[1;+\infty)\\ x^2+2x+1 & \text{при } x\in[-3;1]\end{cases}.$$

Теперь задача свелась к следующей: найти все значения a, при которых хотя бы при одном значении x график y_2 находится выше графика y_1. Это будет в том и только в том случае, когда вершина уголка y_1 будет принадлежать промежутку $(a_1;a_2)$, исключая значение $a=-1$. (Почему $a=-1$ нам не подходит, мы покажем ниже).

Значение a_1 определяется касанием правой ветви уголка $y_1=4x-4a$ параболы $y_2=-x^2-2x+7$. Это будет в том случае, если уравнение $4x-4a=-x^2-2x+7 \Leftrightarrow x^2+6x+7-4a=0$ имеет одно решение. Имеем $\mathrm{D}=64+16a=0 \Rightarrow a_1=-4$.

Значение a_2 определяется касанием левой ветви уголка $y_1=4a-4x$ параболы $y_2=-x^2-2x+7$. Проведя те же рассуждения, получаем $a_2=2$. Нам подходят все значения a из интервала $(-4;2)$, кроме $a=-1$. Действительно, при $a=-1$ уголок имеет уравнение $y_2=4|x+1|$ и $y_2(1)=y_2(-3)=8$ (рис. 30). Следовательно, уголок проходит над точками A и B. Единственная общая точка у графиков y_1 и y_2 это $x=-1$. Но поскольку неравенство строгое, она нам не подходит.

Ответ: $a \in (-4;-1) \cup (-1;2)$.

Задача 19. Найти все значения a, при которых уравнение

$$4x - \left|3x - |x+a|\right| = 9|x-1| \tag{28}$$

имеет хотя бы один корень.

Мы дадим два способа решения этой задачи. Первый способ предполагает у школьника достаточно высокую математическую культуру и сообразительность. Второй способ — стандартный, хотя и достаточно громоздкий.

Решение. I-й способ. Перенесем все члены уравнения в правую часть. Получим

$$9|x-1| + \left|3x - |x+a|\right| - 4x = 0. \tag{29}$$

Обозначим $f(x) = 9|x-1| + \left|3x - |x+a|\right| - 4x$.

1. График $f(x)$ представляет собой ломаную, звеньями которой будут отрезки прямой и два луча на левом и правом концах графика. Далее, если на некотором промежутке звено графика $f(x)$ представляет собой часть прямой с угловым коэффициентом $k > 0$, то на этом промежутке $f(x)$ возрастает; если $k < 0$, то убывает.

2. Заметим, что при $x \geq 1$ выполняется равенство $|x-1| = x-1$ и, следовательно, в первом слагаемом при x будет коэффициент 9. Остальные коэффициенты при x суть 1, 3 и 4. Они в сумме «не дотягивают» до 9. Поэтому как бы ни раскрывались остальные модули, мы на всех промежутках справа от $x = 1$ будем иметь положительные угловые коэффициенты у всех звеньев функции $f(x)$. Следовательно, при $x \geq 1$ функция $f(x)$ будет возрастать. Схематически это показано на рис. 31 ломаной $ABCD$.

При $x \leq 1$ выполняется $|x-1| = 1-x$. Следовательно, в первом слагаемом $f(x)$ коэффициент при x будет (–9). И также независимо от того, с каким знаком будут раскрыты остальные модули, мы будем иметь отрицательные угловые коэффициенты у всех звеньев слева от $x = 1$. Поэтому, слева от $x = 1$ функция $f(x)$ убывает. Схематически это показано на рис. 31 ломаной AFK.

Таким образом, в точке $x = 1$ функция $f(x)$ достигает своего наименьшего значения.

Ясно, что уравнение (29) будет иметь решения в том и только в том случае (рис. 31), когда

$$f(1) \le 0 \Leftrightarrow f(1) = \big|3 - |1 + a|\big| - 4 \le 0.$$

Осталось решить неравенство $\big|3 - |1 + a|\big| - 4 \le 0$. Имеем

$$\begin{cases} 3 - |a+1| \le 4 \\ 3 - |a+1| \ge -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} |a+1| \ge -1 \\ |a+1| \le 7 \end{cases} \Leftrightarrow |a+1| \le 7 \Leftrightarrow -7 \le a+1 \le 7 \Leftrightarrow -8 \le a \le 6.$$

Ответ: $a \in [-8; 6]$.

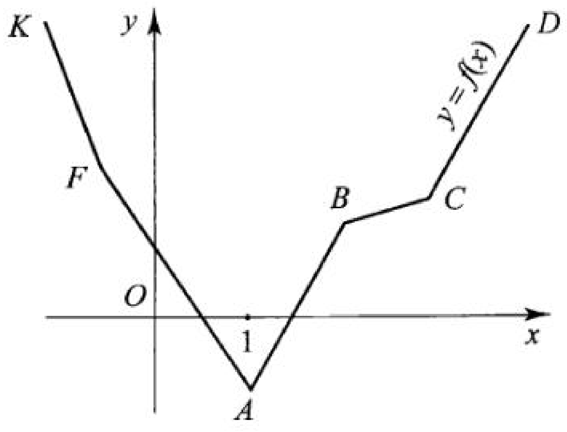


Рис. 31

II-й способ. Если Вы не сообразили или не увидели, что коэффициенты в данном уравнении подобраны так, что всё определяет старший коэффициент при x, то все равно эту задачу можно решить стандартным способом: построить графики функций $f(x) = 4x - \big|3x - |x + a|\big|$ и $g(x) = 9|x - 1|$ и исследовать, при каких a они имеют точки пересечения. Это, конечно, потребует длинной и кропотливой работы по раскрытию модулей у функции $f(x)$. Нам придется отдельно рассматривать $a > 0$, $a = 0$ и $a < 0$, и в каждом из этих случаев раскрывать два модуля. Однако если вы не видите другого, более короткого решения, не стоит на экзамене часами его искать. Надо идти этим трудоемким путем и доводить его до конца. За 20-30 минут, аккуратно проделывая выкладки, вы получите полное, правильное решение этой задачи, вместо того, чтобы потратить все время на поиски короткого, оригинального решения, но так его и не найти.

1. Рассмотрим сначала, при каких $a > 0$ исходное уравнение имеет решения. Для этого нарисуем графики функций $f(x) = 4x - \big|3x - |x + a|\big|$ и $g(x) = 9|x - 1|$. Раскроем знаки модулей у функции $f(x)$.

Случай 1. $x + a \ge 0$. Тогда $|x + a| = x + a$ и $f(x) = 4x - |2x - a|$. Раскроем теперь знак модуля у выражения $|2x - a|$. Имеем,

$$\text{а)}\ \begin{cases} x+a\ge 0 \\ 2x-a\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -a \\ x\ge \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\ge\frac{a}{2}.\ \text{(рис. 32).}$$

При этих значениях a функция $f(x) = 4x - (2x - a) = 2x + a$.

$$\text{б)}\ \begin{cases} x+a\ge 0 \\ 2x-a\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\ge -a \\ x\le \frac{a}{2} \end{cases} \Leftrightarrow x\in[-a;\frac{a}{2}].\ \text{(рис. 33).}$$

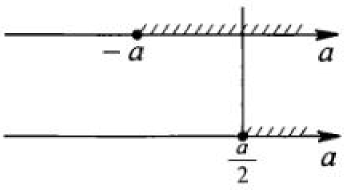


Рис. 32

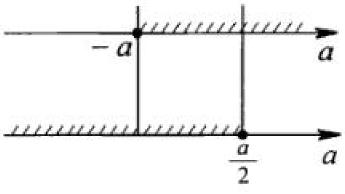


Рис. 33

Тогда $|2x-a| = a - 2x$ и $f(x) = 4x - (a - 2x) = 6x - a$.

Случай 2. $x + a \le 0$. Тогда $|x+a| = -x - a$ и

$$f(x) = 4x - |3x - (-x-a)| = 4x - |4x+a|.$$

$$\text{а)}\ \begin{cases} x+a\le 0 \\ 4x+a\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -a \\ x\ge -\frac{a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\varnothing.\ \text{(рис. 34).}$$

$$\text{б)}\ \begin{cases} x+a\le 0 \\ 4x+a\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\le -a \\ x\le -\frac{a}{4} \end{cases} \Leftrightarrow x\le -a.\ \text{(рис. 35).}$$

Тогда $|4x+a| = -4x - a$ и $f(x) = 4x - (-4x - a) = 8x + a$.

$$\text{Итак, } f(x) = \begin{cases} 2x+a & \text{при } x\ge\frac{a}{2} \\ 6x-a & \text{при } x\in[-a;\frac{a}{2}] \\ 8x+a & \text{при } x\le -a \end{cases}$$

Теперь график функции $f(x)$ строится легко (рис. 36). Он имеет только одну точку пересечения с осью Ox. Это точка пересечения звена $f(x) = 6x - a$ с осью Ox. Найдем ее: $6x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{a}{6}$. (рис. 36).

График $g(x)=9|x-1|$ представляет собой уголок, правая ветвь которого имеет уравнение $g(x) = 9x - 9$, левая ветвь $g(x) = 9 - 9x$ и вершина находится в точке $(1; 0)$. Уголок будет пересекать график $f(x)$ в том и только в том случае, когда вершина уголка будет находится правее точки $x=\frac{a}{6}$ (или в самой точке $x=\frac{a}{6}$) рис. 36). Имеем $\frac{a}{6}\le 1 \Leftrightarrow a\le 6$. Но учитывая, что мы рассматриваем $a > 0$, заключаем, что при положительных a исходное уравнение будет иметь решения при $a\in(0;6]$.

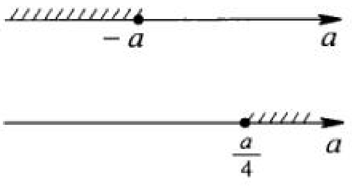


Рис. 34

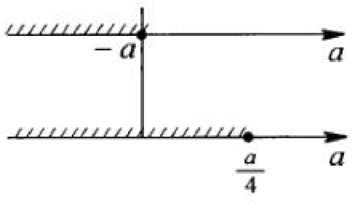


Рис. 35

2. Рассмотрим теперь $a = 0$. В этом случае исходное уравнение имеет вид:

$$4x-|3x-|x||=9|x-1|. \tag{30}$$

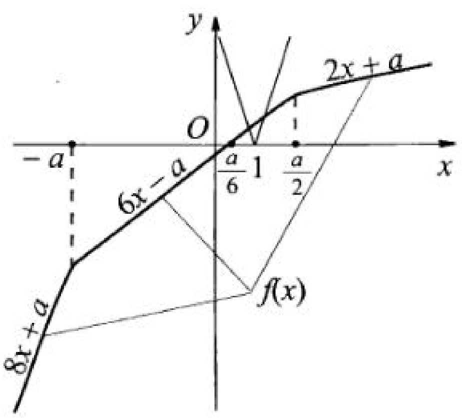


Рис. 36

Конечно, можно также построить графики левой и правой частей уравнения, но проще решить его как обычное уравнение с модулем.

Случай 1. $x\ge 1$. Тогда $|x-1|=x-1$ и $|x|=x$. Имеем $4x-|3x-x|=9(x-1)\Leftrightarrow 2x=9x-9$. Откуда находим $x=\frac{9}{7}$. Это корень уравнения (30). Поэтому $a = 0$ удовлетворяет условию задачи и дальше можно уравнение не решать, поскольку мы показали, что при $a = 0$ решения имеются.

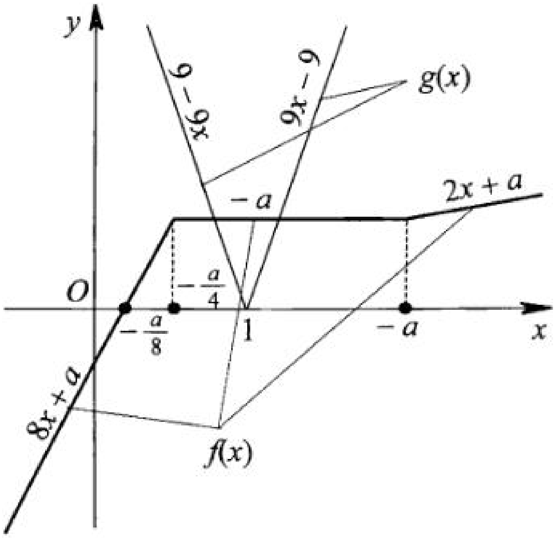


Рис. 37

3. Рассмотрим теперь $a < 0$. Раскрывая точно так же модули функции $f(x)$, как мы это делали при $a > 0$ (проделайте это самостоятельно), мы получим

$$f(x) = \begin{cases} 2x + a \text{ при } x \ge -a \\ -a \text{ при } x \in [-\frac{a}{4}; -a] \\ 8x + a \text{ при } x \le -\frac{a}{4} \end{cases}.$$

График функции $f(x)$ представлен на рис. 37. Заметим, что поскольку $a < 0$, то $-a$ и $-\frac{a}{4}$ больше нуля и $-a > -\frac{a}{4}$.

Найдем точку пересечения графика $f(x)$ с осью Ox. Имеем $8x + a = 0$. Откуда $x = -\frac{a}{8}$.

Уголок $g(x)$ пересекает график $f(x)$ в том и только в том случае, когда его вершина находится правее точки $x = -\frac{a}{8}$ (или в самой этой точке).

Имеем неравенство $-\frac{a}{8} \le 1 \Leftrightarrow a \ge -8$. Учитывая, что мы рассматриваем $a < 0$, заключаем, что при отрицательных a уравнение имеет решения при $a \in [-8;0)$. Собирая теперь все найденные значения a воедино, получаем

Ответ: $a \in [-8;6]$.

Еще раз взглянув на оба решения этого уравнения видим, что, хотя первое решение изящное и короткое, но не всегда на экзамене в условиях ограниченного времени можно его найти. Второе решение хоть намного более длинное, но найти его проще.

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(4;\ 8]$ значение выражения $\log_2^2 x - 8$ **не равно** значению выражения $(2a-1)\log_2 x$.

2. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $(-5;\ -2]$ значение выражения $x^2 - 4x$ **не равно** значению выражения $ax + 4$.

3. Найдите все значения a, для которых при каждом x из промежутка $[1;\ 4)$ значение выражения $x - \sqrt{x} - 1$ **не равно** значению выражения $a\sqrt{x}$.

4. Найдите все значения a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{x-8} = -ax + 3a + 2$ имеет единственное решение.

5. При каких a существует положительное решение неравенства $2 > |x+a| + x^2$.

6. Найдите все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $1 - \frac{a}{x} < \frac{8}{x}(1 - \frac{a+2}{x} + \frac{2a}{x^2})$ содержится в некотором отрезке длиной 7 и при этом содержит какой-нибудь отрезок длиной 4.

7. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $(p-7)x^2 + 4px + 5p = 0$ имеет хотя бы один корень и число корней этого уравнения равно числу корней уравнения $\frac{x-2}{p} = \frac{1}{\sqrt{x-4}+3}$.

8. Найдите все значения параметра p, при которых уравнение $(2p-1)x^2 + 2(2p+1)x - 1 = 0$ имеет хотя бы один корень, и число различных корней этого уравнения равно числу различных корней уравне-

ния $\frac{3x-6}{p}=\frac{1}{\sqrt{x-\frac{1}{3}}-2}$.

9. Даны два уравнения

$\sqrt{24(2p+5)x+p^2+5p+7}=4x+2p+5$ и $(5+5^{\frac{p+3}{p+1}})^x=219-x$.

Значение параметра $p\neq-1$ выбирается так, что число различных корней первого уравнения равно произведению числа $p+3$ и числа различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранного таким образом.

10. Даны два уравнения $\frac{x^3+(p+7)x^2+(2p-11)x-6(p+13)}{x^2+6x+8}=x+p$ и

$2\cos(\frac{\pi x}{x+10})=(4+\sqrt{p+7})x-19$. Значение параметра p выбирается так, что $p\geq-7$ и число различных корней первого уравнения равно сумме числа $7+p$ и числа различных корней второго уравнения. Решите второе уравнение при каждом значении параметра, выбранного таким образом.

11. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых значение выражения $(x-2)(x^2-2x-3)$ **не равно** значению выражения $a(x-\frac{3}{x}-2)$ ни при одном значении переменной $x\in(0;2)$.

12. Найти все значения параметра a, при которых множество решений неравенства $x(x-2)\leq(a+1)(|x-1|-1)$ содержит все члены некоторой бесконечно убывающей прогрессии с первым членом, равным 1,7, и положительным знаменателем.

13. Найти все значения параметра a, при каждом из которых неравенство $(\frac{6}{5}\cos 20°)^{x^2+ax-12}\leq 1$ выполняется для всех $x\in[-6;2]$.

14. Найти все a, при которых неравенство $|9\cos 2x-6(a-2)\sin x+2a-4|\leq 9$ выполняется при всех x.

15. Найти все значения a, при которых уравнение $||x-a|+2x|+4x=8|x+1|$ не имеет ни одного корня.

16. Найдите все значения параметра a, при каждом из которых уравнение $\sqrt{2x+7-4\sqrt{2x+3}}+\sqrt{2x+12-6\sqrt{2x+3}}=a$ имеет хотя бы один

корень, причем каждый из них принадлежит отрезку $[-1;\, 6{,}5]$.

17. Найти все действительные значения a, для каждого из которых существуют четыре целых числа (x, y, u, v), удовлетворяющие системе уравнений $\begin{cases} x^2+y^2=(107-a)(a-91) \\ 54(u^2-v^2)=a(15u+3v-a) \end{cases}$.

18. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство
$\dfrac{a-(3\cos\sqrt{x-1}-1)}{(3x^6+\sqrt{10}x^{-6}-4)-a}\le 0$ не имеет решений.

19. Найдите все значения a, при каждом из которых неравенство
$\dfrac{a-(\log_3 x+2\sqrt{6}\,\log_x 3-5)}{(3\cos\sqrt{x-9}-4)-a}\le 0$ не имеет решений.

20. Найти все значения b, при которых система неравенств
$$\begin{cases} 2b\cos 2(x-y)+8b^2\cos(x-y)+8b^2(b+1)+5b<0 \\ x^2+y^2+1>2bx+2y+b-b^2 \end{cases}$$
выполняется при любых x и y.

21. Найти все неотрицательные числа p, при которых существует единственное действительное число x, удовлетворяющее системе
$$\begin{cases} \mathrm{tg}\pi x=0 \\ (5x+25p+19)(2p-13-4x)\ge 0 \end{cases}.$$

22. Найдите все натуральные значения параметра k, для каждого из которых найдется хотя бы одна пара чисел $(a;\, b)$, таких, что система уравнений $\begin{cases} \sin x+\sin y=\sin(x+y) \\ (x-a)^2+(y-b)^2=k^2 \end{cases}$ не имеет решений.

23. Найдите сумму целых значений параметра k, для каждого из которых найдется хотя бы одна пара чисел $(a;\, b)$, таких, что система уравнений
$\begin{cases} \sin x+\sin y=\sin(x+y) \\ |x-a|+|y-b|=k \end{cases}$ имеет ровно два решения.

24. Найдите все значения a, при каждом из которых функция
$$f(x)=x^2+4x+|\,x^2-\frac{3}{2}x-1\,|-a$$
принимает только неотрицательные значения.

25. Найдите все значения a, при которых наименьшее значение функции
$f(x)=3\,|\,x-a\,|+|\,x^2+x-2\,|$ меньше 2.

26. Найдите все значения параметра a, при которых наименьшее значение функции $y = x^2 + |x-a| + |x-1|$ больше 2.

27. Найти все значения параметра a, при которых наименьшее значение функции $f(x) = ax - |x^2 + 6x + 8|$ меньше 2.

28. Найдите все значения a, при каждом из которых общие решения неравенств $y + 2x \geq a$ и $y - x \geq 2a$ являются решениями неравенства $2y - x > a + 3$.

ОТВЕТЫ

ГЛАВА 1

1. Ответ к первой задаче у Васи неполон потому, что не сказано, какие решения имеет уравнение при $a \in (4;8)$. В ответе второй задачи имеется противоречие. Множества значений параметра a в пунктах 2) и 3) имеют непустое пересечение – это промежуток $[1;8]$. Согласно пункту 2) на этом множестве $x = \frac{2a+6+\sqrt{a+7}}{2}$, а согласно пункту 3) $x = \frac{2a+6+\sqrt{a+7}}{2}$. Эти формулы при одних и тех же a из промежутка $[1;8]$ дают разные значения для x. В ответе третьей задачи никакого противоречия нет, поскольку формула $x = \frac{2a-6+\sqrt{a-4}}{2}$ при $a = 4$ дает также значение $x = 1$, которое указано в пункте 2). А при $a = 8$ обе формулы в пункте 4) и формула в пункте 3) ответа дают одно и то же решение $x = 6$. Поэтому в самом ответе противоречий нет. Конечно, можно переписать ответ в другой, более короткой, форме, объединив пункты 2) и 3) и убрав $a = 8$ из пункта 4). Тогда ответ имел бы вид

$$\left[\begin{array}{l}\text{при } a < 4 - \text{решений нет,}\\ \text{при } 4 \le a \le 8 - \text{одно решение } x = \dfrac{2a-6+\sqrt{a-4}}{2},\\ \text{при } a > 8 - \text{два решения } x_{1,2} = \dfrac{4a-2\pm\sqrt{2a-16}}{5}.\end{array}\right.$$

Но искать самую короткую форму ответа не обязательно. Можно оставить ответ и в первоначальной форме.

ГЛАВА 2

1. При $a = 0$, $x \in R$; при $a \neq 0$, $x = a$.

2. При $a = 2$ решений нет; при остальных a решением будет $x = \frac{3a+1}{2a-4}$.

3. При $a = -2$ решений нет; при $a = 2$, $x \in R$; при $a \neq \pm 2$, $x = \frac{1}{a+2}$.

4. При $a = -1$ решений нет; при $a = 1$, $x \in R$; при остальных a, $x = \frac{2a+3}{a+1}$.

5. При $\alpha = 2\pi k$ решениями будут $x \in R$; при $\alpha = \pi + 2\pi k$, $x \in \varnothing$; при $\alpha \neq \pi k$ ($k \in Z$), $x = \frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha} = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}$.

6. $p < 3{,}5$; $p = 4$.

7. $a = -1$, $a = \frac{1}{3}$, $a = 2$. ***Указание.*** Рассмотрите отдельно случаи, когда оба уравнения имеют решениями $x \in R$, не имеют решений и имеют единственное совпадающее решение.

8. Если $m = 1$, то $x \in R$; если $m > 1$, то $x < \frac{5m}{m-1}$; если $m < 1$, то $x > \frac{5m}{m-1}$.

9. Если $a=0$, то $x\in R$; если $a>0$, то $x\in(-\infty;\frac{1}{a}]$; если $a<0$, то $x\in[\frac{1}{a};+\infty)$.

10. Если $a=1$, то $x\in\varnothing$; если $a=-\frac{1}{2}$, то $x\in R$; если $a\in(-\infty;-\frac{1}{2})\cup(1;+\infty)$, то $x>\frac{2}{2a+1}$; если $a\in(-\frac{1}{2};1)$, то $x<\frac{2}{2a+1}$.

11. Если $a=1$, то $x\in\varnothing$; если $a=-1$, то $x\in R$; если $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$, то $x\geq\frac{1}{a-1}$; если $a\in(-1;1)$, то $x\leq\frac{1}{a-1}$.

12. При $a=b$, $x\in\varnothing$; при всех a и b таких, что $a>b$, решениями будут $x>2$; при всех $a<b$ решениями будут $x<2$.

13. $a\geq\frac{11}{5}$. **14.** $a=2$. **15.** $a=1$.

16. $a=-\frac{1}{2}$. ***Указание.*** См. главу 2 задачу 9.

17. $a\in[-1,2;+\infty)$. ***Решение.*** Приведем неравенство к виду $3ax>a-6$.

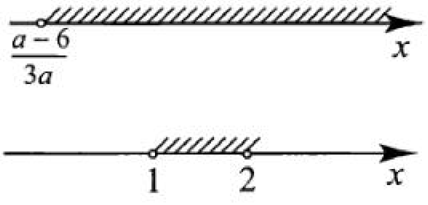


Рис. 1

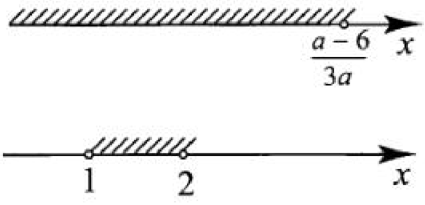


Рис. 2

При $a=0$ неравенство имеет вид $0\cdot x>-6$. Оно выполняется при всех $x\in R$ и, в частности, при $x\in(1;2)$. Следовательно, $a=0$ удовлетворяет условию задачи. При $a>0$ решениями исходного неравенства будут все $x>\frac{a-6}{3a}$. Чтобы оно выполнялось для $x\in(1;2)$, должно быть $\frac{a-6}{3a}\leq1$ (рис. 1). Решая последнее неравенство с учетом $a>0$, получаем $a\in(0;+\infty)$. При $a<0$ решениями будут $x<\frac{a-6}{3a}$. Чтобы исходное неравенство выполнялось при $x\in(1;2)$ должно быть $\frac{a-6}{3a}\geq2$ (рис. 2). Решая это неравенство, с учетом $a<0$, получаем $a\in[-1,2;0)$. Объединение результатов, полученных в этих трёх случаях, дает ответ.

18. $a=2$, $a=7$. ***Указание.*** Решите оба неравенства. Их решением может быть либо $\varnothing$, либо вся числовая прямая, либо луч $(-\infty;c)$, либо луч $(c;+\infty)$. Выясните, имеются ли значения a, при которых оба неравенства не имеют решений; 2) имеют решениями всю числовую ось. И в третьем случае, когда решениями обоих неравенств будут лучи, для совпадения множества решений необходимо совпадение концов этих лучей и одинаковая направленность этих лучей. (У лучей $(-\infty;c)$ и $(c;+\infty)$ концы совпадают, но сами лучи не совпадают!)

19. $a = 1$, $a = 12$. См. указание к предыдущей задаче.

20. $a = -2$, $a = -3$. ***Решение.*** Если $b \neq -\frac{1}{3}$, то исходное уравнение всегда имеет единственное решение. Если $b = -\frac{1}{3}$, то подставив его в уравнение, получим $0 \cdot x = a^2 + 5a + 6$. Чтобы последнее уравнение имело решения, должно быть $a^2 + 5a + 6 = 0$. Откуда $a = -2$ или $a = -3$.

21. 1) $a = 2$, $b = 1$ и 2) $a = 1$, $b = 2$. ***Решение.*** Приведем уравнение к виду $(a^2b + ab^2 - 6)x = a + b + ab - 5$. Данное уравнение имеет более одного решения только в случае, когда число его решений бесконечно, а это будет, если $\begin{cases} a^2b + ab^2 - 6 = 0 \\ a + b + ab - 5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ab(a+b) = 6 \\ a + b + ab = 5 \end{cases}$. Обозначив $a + b = z$, $ab = t$, получим $\begin{cases} zt = 6 \\ z + t = 5 \end{cases}$. Подставим $z = 5 - t$ в первое уравнение: $t^2 - 5t + 6 = 0$. Откуда $t_1 = 2$, $t_2 = 3$. Следовательно, $z_1 = 3$, $z_2 = 2$. Решая теперь две системы $\begin{cases} a + b = 3 \\ ab = 2 \end{cases}$ и $\begin{cases} a + b = 2 \\ ab = 3 \end{cases}$, находим $\begin{cases} a_1 = 2 \\ b_1 = 1 \end{cases}$ или $\begin{cases} a_2 = 1 \\ b_2 = 2 \end{cases}$.

ГЛАВА 3

1. $a \in \left[\frac{11}{16}; +\infty\right]$. **2.** $a \in \left(-\frac{1}{2}; 0\right) \cup \left(0; \frac{9}{2}\right)$. **3.** $a \in \left(-\infty; \frac{4-2\sqrt{13}}{3}\right] \cup \left[\frac{4+2\sqrt{13}}{3}; +\infty\right)$, $a = -1$.

4. $a = 2$, $b = -1$, $c = 1$. ***Указание.*** Приведите уравнение к виду $(a + 2b + 3c - 3)\,x^2 + (3a + b + 2c - 7)\,x + 2a + 3b + c - 2 = 0$. Чтобы это уравнение имело больше двух решений, все коэффициенты и свободный член его должны быть равны 0.

5. $a = 6$, $a = -\frac{6}{19}$.

6. $a = 1$, $a = \frac{1}{2}$. ***Указание.*** Привести уравнение к виду $x^2 - 2ax + 2a - 1 = 0$. По условию $x_1^2 + x_2^2 = x_1 + x_2 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = x_1 + x_2 \Leftrightarrow (2a)^2 - 2\cdot(2a - 1) = 2a \Leftrightarrow a_1 = 1$; $a_2 = \frac{1}{2}$. Проверка показывает, что оба значения a удовлетворяют условию задачи.

7. $a = 2$, $b = -3$ или $a = -3$, $b = 17$.

8. $b = 2$. ***Решение.*** I способ. Пусть x_0 – общий корень обоих уравнений. Тогда выполняются равенства $\begin{cases} 2x_0^2 + (3b-1)x_0 - 3 = 0 \\ 6x_0^2 - (2b-3)x_0 - 1 = 0 \end{cases}$. Умножив первое равенство на 3 и вычтя второе, получим $(11b - 6)x_0 = 8$ или $x_0 = \frac{8}{11b-6}$. Подставляя найденное значение x_0 в первое уравнение, получаем $2\cdot\left(\frac{8}{11b-6}\right)^2 + (3b-1)\left(\frac{8}{11b-6}\right) - 3 = 0$. Откуда находим единственное целое значение $b = 2$. Проверка показывает, что оно удовлетворяет условию задачи. II способ. Пусть x_0 и x_1 – корни первого уравнения, x_0 и

x_2 – корни второго уравнения (x_0 – общий корень обоих уравнений). Тогда по теореме Виета для обоих уравнений имеем систему $\begin{cases} x_1 + x_0 = \frac{1-3b}{2} \\ x_0 \cdot x_1 = -\frac{3}{2} \\ x_2 + x_0 = \frac{2b-3}{6} \\ x_0 x_2 = -\frac{1}{6} \end{cases}$. Разделив второе уравнение системы на четвертое, получим $\frac{x_1}{x_2} = 9$. Подставив $x_1 = 9x_2$ в первое и второе уравнения, мы легко решим полученную систему.

9. $a = \pm 1$.

10. $a = -6$. ***Указание.*** $x_1^2 + x_2^2 = 10 \Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = 10 \Leftrightarrow (a+2)^2 - 2(a+9) = 10 \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow a_1 = 4, a_2 = -6$. При $a_1 = 4$ корней нет, т. к. $D < 0$. Значение $a_2 = -6$ удовлетворяет условию задачи.

11. $a \in (\frac{11}{9}; +\infty)$. **12.** $c > 1$. **13.** $(-2; 3)$. **14.** $(5; 24)$. **15.** $a \in \left[\frac{16}{17}; 2\right)$.

16. $a \in (-2-\sqrt{11}; -2+\sqrt{11})$. **17.** $a \in (5; 24)$. **18.** $a \in \left[-\frac{16}{7}; -2\right)$. **19.** $k \ge 3 + \sqrt{8}$. **20.** $m \in (2; 4)$.

21. Если $a = -2$, то $x \in R$; если $a = 2$, то $x = -0{,}5$; если $a = 5$, то $x = -1$; если $a > 5$, то $x_{1,2} = \frac{-6 \pm \sqrt{60-12a}}{2(a-2)}$; если $a < 5$ и $a \ne \pm 2$, то решений нет.

22. $m \in (\frac{2}{3}; \frac{\sqrt{2}}{2}]$. **23.** $a \in (2; \frac{9}{4})$. **24.** $m \in (-\infty; -3)$. **25.** $m \in (-1; 0) \cup (\frac{1}{2}; 1)$.

26. $a \in (-\infty; 1) \cup (6; +\infty)$. ***Указание.*** Рассмотреть два случая: когда оба корня находятся в промежутке $(1; +\infty)$, и когда только один корень находится в этом промежутке.

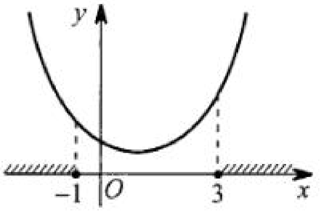


Рис. 3

27. $a = -1$. ***Указание*** Так как $x_1^2 + x_2^2 = (x_1 + x_2)^2 - 2x_1x_2 = (2a)^2 - 2(2a+3) = 4a^2 - 4a - 6$ то нам надо найти, при каких a достигается наименьшее значение функции $f(a) = 4a^2 - 4a - 6$, при условии $D \ge 0$. (Наименьшее значение $f(a)$ на всей прямой достигается при $a = \frac{1}{2}$. Но при этом a нет корней!). Имеем $D = (2a)^2 - 4(2a + 3) = 4a^2 - 8a - 12$. $D \ge 0 \Leftrightarrow 4a^2 - 8a - 12 \ge 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -1] \cup [3; +\infty)$. Наименьшее значение $f(a)$ на этом множестве достигается в одной из крайних точек $a = -1$ или $a = 3$ (рис. 3). Поскольку $f(-1) = 10; f(3) = 30$, то ответом задачи будет $a = -1$.

28. $a = 2$. ***Указание.*** Найти наименьшее значение функции $f(a) = x_1 \cdot x_2 = 2a^2 - 11a + 23$ на множестве $D = (2(a-5))^2 - 4(2a^2 - 11a + 23) \ge 0$.

29. $a \in (-\infty;-1) \cup (\frac{2+2\sqrt{2}}{4};+\infty)$, $a = 1$. ***Указание.*** Исходные уравнения равносильны в следующих случаях: 1) оба уравнения линейные с одинаковыми корнями. Этот случай не имеет места, т. к. одновременно равенства $1 - a = 0$ и $a = 0$ не выполняются; 2) первое уравнение линейное, а второе квадратное и корни обоих уравнений совпадают. В этом случае $a = 1$ и первое уравнение имеет вид $2x - 4 = 0$. Его корень $x = 2$. Подставляя $a = 1$ во второе уравнение, получаем $x^2 - 4x + 4 = 0 \Leftrightarrow x = 2$. Следовательно, $a = 1$ удовлетворяет условию задачи; 3) наоборот, первое уравнение квадратное, а второе линейное, и корни этих уравнений совпадают. Этот случай в нашей задаче не имеет места; 4) оба уравнения квадратные и не имеют решений, т. е. $D_1 < 0$, $D_2 < 0 \Leftrightarrow D_1 = 1 - 4a(1-a) < 0$ и $D_2 = 4 - 4a^2 < 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty;-1) \cup (\frac{2+2\sqrt{2}}{4};+\infty)$. Эти значения a также входят в ответ; 5) оба уравнения квадратные с одинаковыми корнями. Пусть x_1 и x_2 – решения обоих уравнений. Тогда из первого следует $x_1 + x_2 = \frac{2}{a-1}$, а из второго $x_1 + x_2 = \frac{4}{a}$. Имеем $\frac{2}{a-1} = \frac{4}{a} \Rightarrow a = 2$. Но при $a = 2$ из первого уравнения следует $x_1 \cdot x_2 = 8$, а из второго $x_1 \cdot x_2 = 4$. Это противоречие. Следовательно, последний случай не имеет места.

30. $a \in (-5;-4,2]$, $a = 3$. ***Указание.*** Все корни уравнения должны удовлетворять условию $x \geq -7$. Один корень $x = -7$ имеется при любом a. Следовательно, первый сомножитель должен «добавить» к множеству решений только один корень, отличный от $x = -7$. Это будет в двух случаях: 1) квадратный трехчлен имеет один корень, и этот корень удовлетворяет условию $x > -7$; 2) квадратный трехчлен имеет два корня, но только один из них принадлежит промежутку $(-7; +\infty)$. Рассмотрите эти два случая.

31. $a \in (-\sqrt{2+\frac{3}{\sqrt{2}}};-2] \cup [2;\sqrt{2+\frac{3}{\sqrt{2}}})$. ***Указание.*** Имеем, $\left(\frac{x_1}{x_2}\right)^2 + \left(\frac{x_2}{x_1}\right)^2 = \frac{x_1^4 + x_2^4}{x_1^2 x_2^2} =$ $= \frac{(x_1^2 + x_2^2)^2 - 2x_1x_2}{x_1^2 x_2^2} = \frac{(a^2-2)^2 - 2}{2} \leq \frac{5}{2}$. Решите это неравенство с учетом $D = a^2 - 4 \geq 0$.

32. $n = 0$ и $n = l(l + 1)$, где $l = 1, 2, 3 \ldots$. ***Указание.*** $n = 0$ удовлетворяет условию задачи. При $n \neq 0$ имеем $D = (2n - 1)^2 - 4n(n - 2) = 4n + 1$, $D \geq 0 \Rightarrow 4n + 1 \geq 0 \Rightarrow n \geq 1$. Чтобы корни были рациональными, число $4n + 1$ должно быть квадратом некоторого целого числа. Имеем $4n + 1 = k^2$. Откуда получаем $4n = (k-1)(k+1)$. Если k – четное число, то последнее равенство невозможно, т. к. слева будет четное число, а справа – нечетное. Следовательно, k должно быть нечетным, т. е. $k = 2l + 1$. Тогда имеем $4n = (2l+1-1)(2l+1-1)$. Откуда получаем $n = l(l+1)$, где $l = 1, 2, 3 \ldots$.

ГЛАВА 4

1. $a \in R$. **2.** $\varnothing$.

3. a) $a\in[6;+\infty)$; b) $a=\frac{3}{2}$; c) $a\in[\frac{3}{2};+\infty)$. ***Указание*** к п. c). Все $a>3$ удовлетворяют условию задачи, т. к. при этих a ветви параболы направлены вверх и всегда найдутся значения x, при которых исходное неравенство выполняется. Значение $a=3$ также удовлетворяет условию задачи. Значения $a<3$ удовлетворяют условию задачи лишь при условии $D\ge 0 \Leftrightarrow a\in[\frac{3}{2};3)$. Объединение всех этих a дает ответ;

d) $a\in(-\infty;\frac{3}{2})$.

4. $a\in(-12;4)$. **5.** $a\in(-\infty;-1)\cup(\frac{\sqrt{3}}{2};+\infty)$.

6. $a\in(-\infty;-5)\cup(3;+\infty)$. ***Указание.*** Нам подходит только случай на рис. 4, когда отрезок $[0;\ 2]$ находится между корнями. Это будет, если
$\begin{cases} f(0)<0 \\ f(2)<0 \end{cases}$.

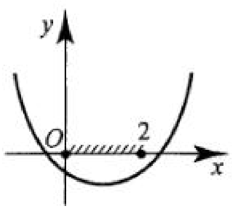


Рис. 4

7. $m\in[\frac{-7-\sqrt{45}}{2};-4+2\sqrt{3}]$. **8.** $a>1$. **9.** $-2\le a\le -\frac{1}{2}$.

10. $a>\frac{3}{4}$. **11.** a) $a\in(-\infty;0]$; b) $a\in[2;+\infty)$.

12. а) $m\le 0$; б) $m\in\varnothing$. ***Указание.*** См. решения задач 9 и 10, разобранных в этой главе.

13. $a\in(\frac{1}{2};1]$.

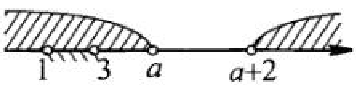


Рис. 5

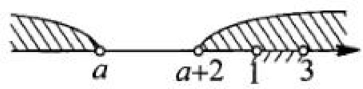


Рис. 6

14. $a\in(-\sqrt[3]{3};-1)$.

Указание. Корни квадратного трехчлена в левой части исходного неравенства есть $x_1=a$, $x_2=a^3$. Решением неравенства $x^2+4x+3<0$ является интервал $(-3;\ -1)$. Решая систему $\begin{cases} -3<a<-1 \\ -3<a^3<-1 \end{cases}$, находим искомые значения a.

15. $a\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$. ***Указание.*** Решением первого неравенства являются все $x\in(-\infty;a)\cup(a+2;+\infty)$, решением второго – $x\in(1;3)$. По условию задачи промежуток $(1;\ 3)$ должен принадлежать множеству $(-\infty;a)\cup(a+2;+\infty)$. Это будет в двух случаях: либо он находится левее точки a (рис. 5), либо правее точки $a+2$ (рис. 6). В первом случае должно выполняться неравенство $a\ge 3\Leftrightarrow a\in[3;+\infty)$, во втором $a+2\le 1\Leftrightarrow a\in(-\infty;-1]$.

16. При $a=-1$ решениями будут $x\in(-\infty;-\frac{1}{2})$; при $a=1$ решениями будут $x\in(\frac{1}{2};+\infty)$; при $a\in(-\infty;-1)\cup(1;+\infty)$ решениями будут $x\in(\frac{1}{a+1};\frac{1}{a-1})$; при $a\in(-1;1)$ решениями будут $x\in(-\infty;\frac{1}{a-1})\cup(\frac{1}{a+1};+\infty)$. ***Указание.*** Сначала рассмотрите $a=\pm 1$. При $a \neq \pm 1$ квадратный трехчлен в левой части имеет два корня $x_1=\frac{1}{a-1}$ и $x_2=\frac{1}{a+1}$. Найдите a, когда $x_1 < x_2$ и $x_1 > x_2$, затем с учетом знака коэффициента при x^2 выпишите решения.

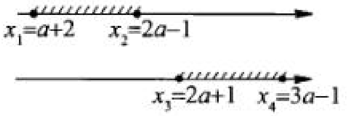
17. $a=\pm 1$. ***Указание.*** Корни квадратного трехчлена в левой части неравенства: $x_1=\frac{2a-\sqrt{4a^2+12}}{2}$ и $x_2=\frac{2a+\sqrt{4a^2+12}}{2}$. Решением исходного неравенства будет промежуток $[x_1;x_2]$. Длина этого промежутка равна $|x_2-x_1|=4$. Подставляя x_1 и x_2 в это равенство, находим $a=\pm 1$.

18. 1) $a\in[20;+\infty)$. ***Указание.*** Решив первое неравенство, найдем $x\in[5;17]$. Теперь для ответа на первый вопрос необходимо и достаточно выполнения двух условий: $\begin{cases} f(5)\le 0 \\ f(17)\le 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in[20;+\infty]$. 2) $a\in[12;20]$. ***Указание.*** В случае 2) задача сводится к нахождению значений a, при которых все решения второго неравенства принадлежат промежутку [5; 17]. Это имеет место, если: $\begin{cases} \mathrm{D}\ge 0 \\ 5\le x_{\text{в}}\le 17 \\ f(5)\ge 0 \\ f(17)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a\in[12;20]$. 3) $a=20$.

Указание. Единственное значение a, принадлежащее обоим промежуткам [12; 20] и $[20;+\infty)$, есть $a=20$. При этом значении a все решения первого неравенства содержатся среди решений второго и наоборот, все решения второго неравенства содержатся среди решений первого. Это может быть только при совпадении решений первого и второго неравенств, т. е. когда наши неравенства равносильны. (Заметим, что при $a=20$ оба неравенства имеют вид: $x^2-22x+85<0$).

19. а) $k\le 0$; б) $k\ge 1$; с) $k\in\varnothing$. ***Указание.*** Умножим второе неравенство на (–1), получим $kx^2-1\le 0$. Нарисовав графики функции $y=kx^2-1$ при $k=0$, $k>0$ и $k<0$, покажите, что в случае а) условию задачи удовлетворяют все $k<0$ и $k=0$. В случае б) задача сводится к нахождению всех k, при которых все решения неравенства $kx^2-1\le 0$ содержатся в множестве $x\le 1$. Это имеет место при $\begin{cases} k>0 \\ y(1)\ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow k\ge 1$. Случай с) не имеет места, поскольку множества $k\le 0$ и $k\ge 1$ не имеют общих точек. Следовательно, нет таких k, при которых неравенства $kx^2-1\le 0$ и $x\le 1$ равносильны.

20. $a\in(-\infty;\frac{3}{2})$. ***Решение.*** Найдем корни квадратных трехчленов в этих неравенствах. Имеем $x_1=a+2$ и $x_2=2a-1$ – корни первого трехчлена, $x_3=2a+1$ и $x_4=3a-1$ – корни второго трехчлена. При $x_1\le x_2 \Leftrightarrow a+2\le 2a-1 \Leftrightarrow a\ge 3$, решением первого неравенства будет промежуток $[x_1; x_2]$. Соответственно, при $a\le 3$ его решением будет промежуток $[x_2; x_1]$. (При $a=3$ оба промежутка вырождаются в одну точку $x_1=x_2=5$). Аналогично, при $x_3\le x_4 \Leftrightarrow 2a+1\le 3a-1 \Leftrightarrow a\ge 2$ решением второго неравенства будет промежуток $[x_3; x_4]$, а при $a\le 2$ – промежуток $[x_4; x_3]$. Рассмотрим три случая $a \ge 3$, $2 \le a \le 3$, $a \le 2$ и выясним, как будут расположены друг относительно друга множества решений наших неравенств.



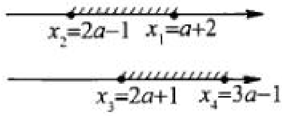


Рис. 7 **Рис. 8**

1) Если $a \ge 3$, то решением первого и второго неравенств будут соответственно промежутки $[x_1; x_2]$ и $[x_3; x_4]$ (рис. 7). Так как $2a + 1 > 2a - 1$, то точка, $x_3 = 2a+1$ всегда находится правее точки $x_2 = 2a-1$. Следовательно, эти промежутки не пересекаются (рис. 7). Поэтому при $a \ge 3$ исходная система неравенств решений не имеет. 2) Если $a \in [2;3]$, то решениями неравенств будут промежутки $[x_2; x_1]$ и $[x_3; x_4]$ (рис. 8). Они имеют пересечение только в одном случае, когда точка x_3 находится между точками x_2 и x_1. А это будет при выполнении неравенств: $2a-1 \le 2a+1 \le a+2 \Leftrightarrow a \le 1$. Но учитывая, что $a \in [2;3]$, получаем, что и в этом случае система неравенств решений не имеет. 3) Если $a \le 2$, то решениями первого и второго неравенств будут соответственно промежутки $[x_2; x_1]$ и $[x_4; x_3]$. Поскольку точка $x_3 = 2a + 1$ всегда находится правее точки $x_2 = 2a-1$, то эти промежутки имеют непустое пересечение, когда точка $x_4 = 3a - 1$ находится левее точки $x_1 = a + 2$ (рис. 9). Последнее имеет место при выполнении неравенства $3a-1 \le a+2 \Leftrightarrow a \in [-\infty; \frac{3}{2})$.

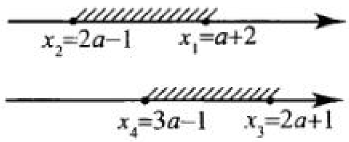


Рис. 9

21. При $b = 2$ решениями будут $x \ge -\frac{1}{2}$; при $b = -2$ решениями будут $x \le \frac{1}{2}$; при $b \in (-\infty;-2) \cup (2;+\infty)$ решениями будут $x \in [x_1; x_2]$; при $b \in (-2;-\sqrt{2}) \cup (\sqrt{2};2)$ решениями будут $x \in (-\infty; x_2] \cup [x_1;+\infty)$; при $b \in (-\sqrt{2};\sqrt{2})$, решениями будут $x \in R$. (Здесь $x_1 = \frac{2b-2\sqrt{2b^2-4}}{b^2-4}$, $x_2 = \frac{2b+2\sqrt{2b^2-4}}{b^2-4}$ – корни квадратного трехчлена в левой части исходного неравенства). ***Указание.*** См. решение задачи 12.

22. $b \in (\frac{5}{7};1)$. ***Решение.*** Чтобы неравенство не выполнялось при любом значении a, его дискриминант должен быть отрицательным при всех a. Т. е. при всех a должно выполняться неравенство: $D = (2a+4b)^2 - 4\cdot(2a^2b + 4b^2 - 2ab - 6b + 15) = (4-8b)a^2 + 24ab + 24b - 60 < 0$. 1) Если $4 - 8b = 0 \Leftrightarrow b = \frac{1}{2}$, то неравенство принимает вид: $12a - 48 < 0 \Leftrightarrow a < 4$, т. е. выполняется только при $a \in (-\infty; 4)$. Следовательно, $b = \frac{1}{2}$

не удовлетворяет условию задачи. 2) При $b > \frac{1}{2}$, последнее неравенство выполняется при всех a, если: $\begin{cases} 4-8b<0 \\ D<0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D=(24b)^2-4(4-8b)(24b-6)<0 \Leftrightarrow b\in(\frac{5}{7};1) \\ b>\frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow b \in \left(\frac{5}{7};1\right)$.

ГЛАВА 5

1. a) $a \in (4,5;\ 12)$. b) $a \in \left(-\infty;\frac{23}{6}\right]$, $a = 4,5$, $a = 12$. c) $a \in \left(\frac{23}{6};4,5\right) \cup (12;+\infty)$. d) $a \in (-\infty;4,5] \cup [12;+\infty)$. ***Указание.*** Пункт d) есть объединение пунктов b) и c). Но можно рассуждать и так: в пункте a) мы показали, что при $a \in (4,5;12)$ уравнение решений не имеет. Следовательно, при остальных a оно имеет хотя бы одно решение. «Остальными» a как раз и является множество $a \in (-\infty;4,5] \cup [12;+\infty)$. e) $a \in (12;+\infty)$. ***Указание к пункту*** e). Так как по условию $x_1, x_2 > 2$, то $t_1 = 2^{x_1} > 4$ и $t_2 = 2^{x_2} > 4$. Таким образом, исходная задача свелась к стандартной: нахождению значений a, при которых квадратное уравнение $3t^2-(4a-6)t+18a-69=0$ имеет два корня больших 4.

2. Если $a \in (-\infty;-6]$, то $x = \log_3 \frac{-a-2+\sqrt{a^2+2a-8}}{2}$; если $a \in (-6;-4)$, то $x_{1,2} = \log_3 \frac{-a-2\pm\sqrt{a^2+2a-8}}{2}$; если $a = -4$, то $x = 0$; если $a \in (-4;+\infty)$, то решений нет. Единственное решение при $a \in (-\infty;-6] \cup \{-4\}$.

3. $p \in (-\infty;5) \cup [10;+\infty)$. ***Указание.*** Обозначив $5^x = t$, $t > 0$, получаем уравнение: $5(p-10)t^2+10t+p-6=0$. Далее рассмотрите три случая: 1) $p-10=0$, 2) $\begin{cases} p-10\neq 0 \\ D<0 \end{cases}$ и 3) $\begin{cases} p-10\neq 0 \\ D\geq 0 \\ t_1,t_2\leq 0 \end{cases}$.

4. $p \in \left[-2;-\frac{2}{\sqrt{5}}\right] \cup \left[\frac{2}{\sqrt{5}};2\right]$.

5. $a \in \left(0;\frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2};3\right)$. ***Указание.*** См. решение задачи 6.

6. $a \in (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$. ***Указание.*** Заменив $\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$ и обозначив $t = \cos x$ ($t \in [-1;1]$), приходим к уравнению $t^2 - t + a - a^2 = 0$. Корни полученного квадратного уравнения $t_1 = a$; $t_2 = 1 - a$. Рассмотрев четыре случая: a) t_1; $t_2 > 1$; b) $t_1, t_2 < -1$; c) $t_1 < -1, t_2 > 1$ и d) $t_2 < -1, t_1 > 1$, получим ответ.

7. $a \in (1;3) \cup (3;5)$.

8. При $a<-\frac{3}{2}$ решением будет $x=\log_5\frac{a-1+\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$; при $-\frac{3}{2}\le a<11$ решений нет; при $a=11$ решением будет $x=1$; при $a>11$ решениями будут $x_{1,2}=\log_5\frac{a-1\pm\sqrt{a^2-10a-11}}{2}$. Единственное решение при $a=11$ и $a\in\left(-\infty;-\frac{3}{2}\right)$.

9. При $a\in[-3;-2]$, $x=\pm\arccos\sqrt{a+3}+\pi k$, $k\in Z$. **Решение.** Обозначив $t=\cos^2 x$, $t\in[0;1]$, сведём исходное уравнение к исследованию, при каких a квадратное уравнение $t^2-(a+2)t-(a+3)=0$ имеет хотя бы один корень в промежутке [0; 1]. Корни квадратного уравнения $t_1=a+3$ и $t_2=-1\notin[0;1]$. Следовательно, должно выполняться неравенство: $0\le a+3\le 1\Leftrightarrow a\in[-3;-2]$. При этих a имеем: $\cos^2 x=a+3\Leftrightarrow\cos x=\pm\sqrt{a+3}$. Откуда находим $x_1=\pm\arccos\sqrt{a+3}+2\pi k$, $x_2=\pm\arccos(-\sqrt{a+3})+2\pi k$. Эти две серии можно объединить в одну: $x=\pm\arccos\sqrt{a+3}+\pi k$, $k\in Z$.

10. Если $a<-3$ или $a\ge 0$, то решений нет. Если $-3\le a<0$, то $x=2\pm\log_3(2-\sqrt{a+4})$. ***Решение.*** Обозначим $t=3^{-|x-2|}$. Так как $-\infty<-|x-2|\le 0$, то $0<t=3^{-|x-2|}\le 1$. Теперь исходное уравнение сводится к нахождению значений a, при которых квадратное уравнение $t^2--4t-a=0$ имеет корни, принадлежащие промежутку (0; 1]. Поскольку вершина квадратного трехчлена $f(t)=t^2-4t-a$ равна $t_в=2$, то промежутку $(0;1]$ может принадлежать только меньший корень (рис 10). А это будет, если $f(0)>0$ и $f(1)\le 0$. Решением этих двух неравенств будут $a\in[-3;0)$. Решив теперь квадратное уравнение $t^2-4t-a=0$ и взяв его меньший корень $t_1=2-\sqrt{a+4}$, имеем: $3^{-|x-2|}=2-\sqrt{a+4}\Leftrightarrow-|x-2|=\log_3(2-\sqrt{a+4}\Leftrightarrow|x-2|=-\log_3(2-\sqrt{a+4})$. Откуда:
a) $x-2=-\log_3(2-\sqrt{a+4})\Leftrightarrow x=2-\log_3(2-\sqrt{a+4})$; b) $2-x=-\log_3(2-\sqrt{a+4})\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x=2+\log_3(2-\sqrt{a+4})$.

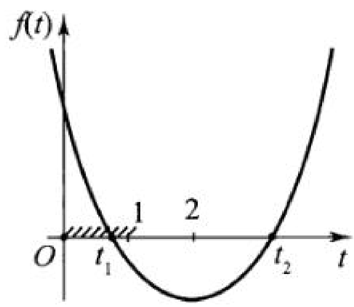


Рис. 10

11. Если $a\in\left(-\infty;-\sqrt{2}\right)\cup\left[\sqrt{2};+\infty\right)$, то $x=(-1)^k\arcsin 10^{a-\sqrt{2(a^2-1)}}+\pi k$, $k\in Z$; если $a\in[-\sqrt{2};-1]$, то $x_1=(-1)^k\arcsin 10^{a-\sqrt{2(a^2-1)}}+\pi k$ и $x_2=(-1)^k\arcsin 10^{a+\sqrt{2(a^2-1)}}+\pi k$, $k\in Z$; если $a\in(-1;\sqrt{2})$, то решений нет. ***Решение.*** Полагая $t=\lg\sin x$ и учитывая, что область значений t есть промежуток $(-\infty;0]$, сведем исходную задачу к исследованию расположения корней квадратного уравнения $t^2-2at+2-a^2=0$ относительно промежутка $(-\infty;0]$. Исходное уравнение будет иметь решения в двух случаях: 1. оба корня t_1 и t_2 принадлежат промежутку $(-\infty;0]$. Это имеет место, если:

$\begin{cases} D \ge 0 \\ t_в < 0 \\ f(0) \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} D = 8(a^2-1) \ge 0 \\ t_в = a < 0 \\ f(0) = 2-a^2 \ge 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in [-\sqrt{2}; -1]$. При этих значениях a корни квадратного уравнения $t_{1,2} = a \pm \sqrt{2(a^2-1)}$. Теперь найдем корни исходного уравнения. Имеем: а) $\lg \sin x = a - \sqrt{2(a^2-1)} \Leftrightarrow \sin x = 10^{a-\sqrt{2(a^2-1)}} \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin 10^{a-\sqrt{2(a^2-1)}} + \pi k$; б) $\lg \sin x = a + \sqrt{2(a^2-1)} \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin 10^{a+\sqrt{2(a^2-1)}} + \pi k$, где $k \in Z$. 2. Меньший корень уравнения $t^2 - 2at + 2 - a^2 = 0$ принадлежит промежутку $(-\infty; 0]$. Это имеет место, если $f(0) \le 0 \Leftrightarrow 2 - a^2 \le 0 \Leftrightarrow a \in (-\infty; -\sqrt{2}] \cup [\sqrt{2}; +\infty)$. При этих a (кроме $a = -\sqrt{2}$) меньший корень $t_1 = a - \sqrt{2(a^2-1)}$ принадлежит промежутку $(-\infty; 0]$. Имеем: $\lg \sin x = a - \sqrt{2(a^2-1)} \Leftrightarrow \sin x = 10^{a-\sqrt{2(a^2-1)}} \Leftrightarrow x = (-1)^k \arcsin 10^{a-\sqrt{2(a^2-1)}} + \pi k$. При остальных a решений нет.

12. При $m \in [-1; \frac{-1+\sqrt{13}}{4}]$, $x = (-1)^k \arcsin \log_2 \left[\frac{(-m)+\sqrt{4-3m^2}}{2}\right] + \pi k, k \in \mathbb{Z}$; при остальных m из промежутка $-1 \le m \le 1$ решений нет.

13. $a \in [-\frac{1}{8}; +\infty)$. **14.** $a \in (-\infty; -1) \cup (0; +\infty)$.

15. $a \in (4; +\infty)$. Рассмотрите три случая: $5a+5=0$, $5a+5>0$, $5a+5<0$.

16. $a \in (-\infty; -3-\sqrt{13}] \cup [\sqrt{5}-1; +\infty)$. ***Указание.*** Обозначьте $3^{|\sin x|} = t$, $t \in [1; 3]$.

17. $a \in [1; +\infty)$. **18.** $a \in \left(-\infty; -\frac{3+\sqrt{13}}{2}\right) \cup \left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}; +\infty\right)$.

19. При $a < 0$, $x \in (-\log_3(-a); +\infty)$; при $a = 0$, $x \in R$; при $a > 0$, $x \in (\log_3 a - 2; +\infty)$.

20. При $a < 0$, $x \in \left(-\infty; \log_4\left(-\frac{a}{2}\right)\right)$; при $a = 0$, $x \in \varnothing$; при $a > 0$, $x \in \left(-\infty; \log_4 \frac{3a}{4}\right)$.

21. $a \in (-\infty; -4]$.

22. $a \in R$. ***Указание.*** Обозначив $t = 3^x$ $(t > 0)$, сведите исходное неравенство к неравенству $t^2 - (2a+1)t - a^5 - a > 0$ и нахождению значений a, при которых оно выполняется хотя бы для одного $t > 0$. Но так как ветви квадратного трехчлена $y = t^2 - (2a+1)t - a^5 - a$ направлены вверх, то при всех $a \in R$ такие t всегда есть.

23. $a \in [1; 2,5]$. ***Указание.*** Обозначим $t = 2^x$. При $0 < x < 2$ область значений t есть промежуток $(1; 4)$. Итак, задача свелась к следующей: при каких a квадратное неравенство $t^2 - (3a+1)t + 5a - 5 < 0$ выполняется для всех $t \in (1; 4)$? Это будет при $f(1) \le 0$ и $f(4) \le 0$.

24. $b \ge -\frac{31}{22}$. **25.** $a \in [0,5; \infty)$.

26. $p\in[17;+\infty)$. ***Указание.*** Приведите уравнение к виду $\left(4^x+\frac{1}{4^x}\right)+$ $+4\left(2^x+\frac{1}{2^x}\right)+7-p=0$ и обозначьте $2^x+\frac{1}{2^x}=t$. Тогда $4^x+\frac{1}{4^x}=t^2-2$. Воспользовавшись неравенством (26) из главы 5, покажите, что область значений t есть промежуток $[2;+\infty)$. Таким образом, задача свелась к нахождению значений p, при которых квадратное уравнение $t^2+4t+5-p=0$ имеет хотя бы один корень в промежутке $[2;+\infty)$.

27. $a\in\left(-\frac{1}{2};0\right]$. ***Указание.*** Обозначив $t=\frac{x^2}{1+x^2}$, сведите исходное уравнение к квадратному. Представив $t=\frac{x^2}{1+x^2}=\frac{x^2+1-1}{1+x^2}=1-\frac{1}{1+x^2}$, покажите, что область значений t есть промежуток $[0;\ 1)$. Теперь задача свелась к нахождению тех a, при которых квадратное уравнение имеет хотя бы один корень в промежутке $[0;\ 1)$. Рассмотрите три случая: $1+a=0$, $1+a>0$ и $1+a<0$.

28. $p\in[-7{,}5;+\infty)$. ***Указание.*** Заменив $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, приведите данное неравенство к виду $\sin^2 x-2p|\sin x|+2p+15\ge 0$. Обозначив $t=|\sin x|$ и заметив, что $|\sin x|^2=\sin^2 x$, последнее неравенство сводится к квадратному $t^2-2pt+2p+15\ge 0$, где $t\in[0;1]$. Теперь наша задача свелась к нахождению тех p, при которых полученное квадратное неравенство будет выполняться при $t\in[0;1]$. Проведя стандартные рассуждения, получите ответ.

29. $a\in\left[-\frac{121}{9};0\right)\cup(15;+\infty)$. ***Указание.*** Поскольку: 1) $\frac{1}{27}(54x-9x^2)^2=\frac{1}{27}\cdot 81(6x-x^2)^2$ $=3(x^2-6x)^2$, 2) $a(3\sqrt{2}-\sqrt{2}x)^2=2a(3-x)^2=2a(x^2-6x+9)$, 3) $3(4x^2-9a-4)-$ $-72x=12(x^2-6x)-27a-12$, то, обозначив $x^2-6x=t$, исходное уравнение легко приводится к виду: $3t^2-(2a+12)t+9a+12=0$. Область значений $t=x^2-6x$ есть промежуток $[-9;+\infty)$. Чтобы исходное уравнение имело 4 корня, полученное квадратное уравнение должно иметь два несовпадающих корня $t_1, t_2>-9$. Выписывая соответствующие условия, получим ответ.

30. $a\in\left[-\frac{27}{4};5\right]$. ***Указание.*** Неравенство $x^2\le\frac{\pi^2}{36}$ равносильно $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$. Заменив $\cos 2x=1-2\sin^2 x$, приведем тригонометрическое неравенство к виду $\sin^2 x-4(a+1)|\sin x|+a-5\le 0$. То, что из $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$ следует тригонометрическое неравенство, означает, что оно должно выполняться для всех $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$. Замените $t=|\sin x|$. При $-\frac{\pi}{6}\le x\le\frac{\pi}{6}$, $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Итак, задача свелась к нахождению a, при которых квадратное неравенство $t^2-(4a+4)t+a-5\le 0$ выполняется при $t\in\left[0;\frac{1}{2}\right]$. Последнее будет при $f(0)\le 0$ и $f(\frac{1}{2})\le 0$.

31. $m\in[-6;4]$. ***Указание.*** Обозначим $t=4^{\sin x}$. При $0\le x\le\frac{5\pi}{6}$ область значений $\sin x$ есть промежуток [0; 1] (а не $\left[0;\frac{1}{2}\right]$). Следовательно, $1\le t\le 4$. После этого задача сводится к нахождению m, при которых квадратное неравенство $t^2-(3m+3)t+9m-22\le 0$ выполняется при $t\in[1;4]$. Это будет, если $f(1)\le 0$ и $f(4)\le 0$.

32. $a\in\left(-\frac{147}{13};\frac{147}{11}\right)$. ***Указание.*** $x=0$ является решением при всех a. Если $x\ne 0$, то разделив обе части неравенства на x^2, получим равносильное неравенство: $16x^2+\frac{81}{x^2}-a\left(4x+\frac{9}{x}\right)+a+75>0$. Обозначьте $t=4x+\frac{9}{x}$. Воспользовавшись неравенством между средним арифметическим и средним геометрическим (глава 5, неравенство (24)), покажите, что область значений t есть множество $(-\infty;-12]\cup[12;+\infty)$. Из равенства $t=4x+\frac{9}{x}$ следует, что $16x^2+\frac{81}{x^2}=t^2-72$ и наше неравенство сводится к нахождению значений a, при которых квадратное неравенство $t^2-at+a+3>0$ выполняется при всех $t\in(-\infty;-12]\cup[12;+\infty)$. Далее решение аналогично разобранной в этой главе задаче 11.

33. $a\in[0;4]$. ***Указание.*** Перейдя в обоих слагаемых к основанию 2 обозначьте $t=\log_2(7x^2-28x+29)$. При $x\in[-1;3]$ область значений квадратного трехчлена $p(x)=7x^2-28x+29$ есть промежуток [1; 64]. Следовательно, $0\le t=$ $=\log_2(7x^2-28x+29)\le 6$. Таким образом, задача свелась к следующей: при каких a квадратное неравенство $t^2-2at+a^2+5a-36\le 0$ выполняется при всех $t\in[0;6]$? Это будет иметь место, когда промежуток [0; 6] находится между корнями квадратного трехчлена $f(t)=t^2-2at+a^2+5a-36\le 0$, т. е. при $f(0)\le 0$ и $f(6)\le 0$.

34. $a\in\left[-1;\frac{1}{4}\right]\cup[1;+\infty)$. ***Указание.*** 1. Обозначим $t=\sqrt{2-\frac{6}{\pi}\arcsin(\sqrt{3}-2x)}$, $t\ge 0$. Тогда $t^2=2-\frac{6}{\pi}\arcsin(\sqrt{3}-2x)$ и $\arcsin(\sqrt{3}-2x)=\frac{(2-t^2)\pi}{6}$. 2. Так как при всех допустимых z имеют место равенства: $\arccos z+\arcsin z=\frac{\pi}{2}$ и $\arcsin(-z)=-\arcsin z$, то $\arccos(2x-\sqrt{3})=\frac{\pi}{2}-\arcsin(2x-\sqrt{3})=\frac{\pi}{2}+\arcsin(\sqrt{3}-2x)$. 3. Теперь исходное неравенство можно переписать в виде $2at^2-4a^2t+8a^2-7a+1\ge 0$ (1). 4. По условию $\frac{2\sqrt{3}-1}{4}\le x\le\frac{3\sqrt{3}}{4}$. Тогда $-\frac{\sqrt{3}}{2}\le\sqrt{3}-2x\le\frac{1}{2}$. Тогда $-\frac{\pi}{3}=\arcsin(\sqrt{3}-2x)\le\frac{\pi}{6}$. Тогда $1\le 2-\frac{6}{\pi}\arcsin(\sqrt{3}-2x)\le 4$. Тогда $1\le t=\sqrt{2-\frac{6}{\pi}\arcsin(\sqrt{3}-2x)}\le 2$. Итак, задача свелась к следующей. Найти все a, при которых неравенство (1) выполняется при всех $t\in[1;2]$. Это стандартная задача. Рассмотрев отдельно случаи $a=0$, $a>0$ и $a<0$ и выписав в каждом из этих случаев соответствующие условия, мы придем к ответу.

ГЛАВА 6

1. При $a < 6$ – решений нет; при $a = 6$ – бесконечное множество решений; при $a > 6$ – одно решение. ***Указание:*** постройте графики функций $y_1 = |3x - 6| + 3x$ и $y_2 = a$ (рис. 11).

2. При $a < 6$ – решений нет; при $a = 6$ и $a > 8$ – два решения; при $6 < a < 8$ – четыре решения; при $a = 8$ – три решения.

3. При $a > 0$ – решений нет; при $a = 0$ – два решения; при $-1{,}6 < a < 0$ – четыре решения; при $a = -1{,}6$ – пять решений; при $-2{,}5 < a < -1{,}6$ – шесть решений; при $a = -2{,}5$ – четыре решения; при $a < -2{,}5$ – два решения.

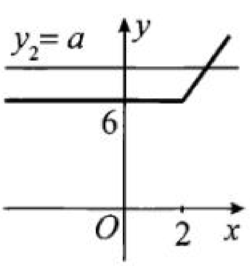


Рис. 11

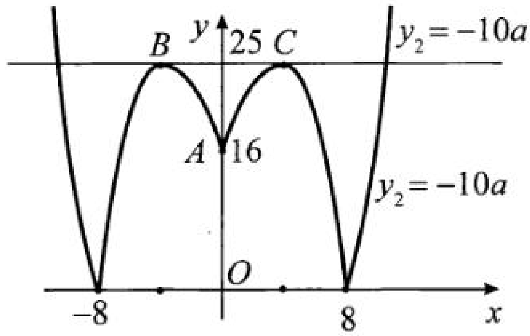


Рис. 12

Указание: постройте графики функций $y_1 = |x^2 - 6|x| - 16|$ и $y_2 = -10a$. Заметьте, что функция y_1 – четная, поэтому достаточно построить график этой функции для $x \geq 0$ и затем симметрично отобразить его относительно оси Oy (рис. 12). График функции $y_2 = -10a$ при каждом a есть прямая, параллельная оси Ox. Рассмотрите все случаи расположения прямой $y_2 = -10a$ относительно графика y_1.

4. При $a < -1$ и $a > 3$ – одно решение; при $a = -1$ и $a = 3$ – два решения; при $-1 < a < 3$ – три решения. ***Решение.*** Перепишем уравнение в виде $x^3 - 6x^2 + 9x - 1 = a$. Построим графики $y_1 = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ и $y_2 = a$. График y_1 проще всего построить с применением производной. Имеем $D(y_1) = R$, $y_1' = 3x^2 - 12x + 9$. Приравнивая производную к нулю $y_1' = 0 \Leftrightarrow 3x^2 - 12x + 9 = 0$, находим $x_1 = 1$ и $x_2 = 3$ – критические точки. Нанеся критические точки на числовую ось, найдем знаки производной на полученных промежутках (рис. 13).
Из положения знаков производной следует $x = 1$ – точка максимума, $x = 3$ – точка минимума. Имеем $y_1(1) = 3$ – максимум, $y_1(3) = -1$ – минимум. График функции y_1 представлен на рис. 14. График $y_2 = a$ представляет собой семейство прямых, параллельных оси Ox. Анализируя различные случаи расположения прямых $y_2 = a$ относительно графика y_1, получаем ответ.

5. При $a < 6$ и $a = 7$ – два решения; при $a = 6$ – три решения; при $6 < a < 7$ – четыре решения; при $a > 7$ – решений нет.

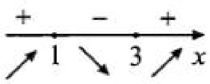


Рис. 13

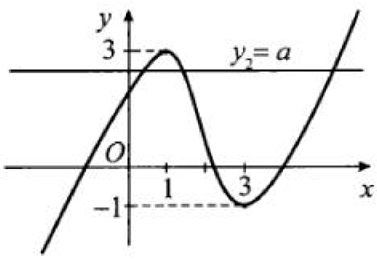


Рис. 14

6. При $a \in [-2; 1]$ – решений нет; при $a \in (-\infty; -2) \cup (0; 1) \cup (\frac{5}{3}; +\infty)$ – одно решение; при $a = 1$ и $a = \frac{5}{3}$ – два решения; при $a \in (1; \frac{5}{3})$ – три решения. ***Указание.*** Раскрыв модули, постройте график функции $y_1 = |2x - 2| - |x - 3| - x + 4$. Имеем $y_1 = 5$ при $x \geq 3$, $y_1 = 2x - 1$ при $1 \leq x \leq 3$, $y_1 = -2x + 3$ при $x \leq 1$. График этой функции изображен на рис. 15. Вершины A и B имеют координаты: $A(3; 5)$, $B(1; 1)$. График $y_2 = ax$ при каждом a представляет собой прямую, проходящую через начало координат. Далее рассмотрите три случая: $a > 0$, $a = 0$, $a < 0$. При $a = 0$ уравнение решений не имеет. В случае $a > 0$ рассмотрите отдельно, когда прямая $y_2 = ax$ проходит ниже вершины B (рис. 15, прямая l_1). Это будет, если $y_2(1) < 1 \Leftrightarrow \Leftrightarrow a < 1$. Затем, рассмотрите случаи: когда прямая проходит через точку B; проходит между точками A и B; проходит через точку A; проходит выше точки A. В случае $a < 0$ прямая $y_2 = ax$ параллельна лучу FB, при $a = -2$ (рис. 15, прямая l_3). Следовательно, при $-2 < a < 0$ решений нет, а при $a < -2$ – одно решение.

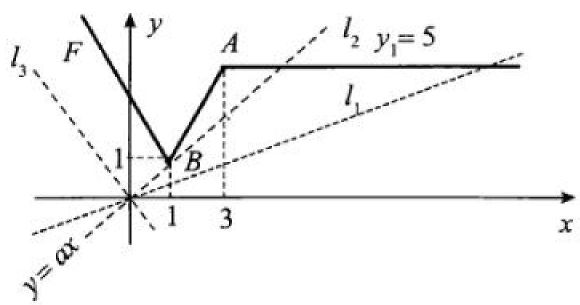


Рис. 15

7. При $-6 - 2\sqrt{6} < a < \frac{1}{5}$ – решений нет; при $a = \frac{1}{5}$ и $a = -6 - 2\sqrt{6}$ – одно решение; при $a \in (-\infty; -6 - 2\sqrt{6}) \cup (\frac{1}{5}; 1) \cup (6 - 2\sqrt{6}; +\infty)$ – два решения; при $a = 1$ – три решения; при $1 < a < 6 - 2\sqrt{6}$ – четыре решения. ***Указание.*** Представив исходное уравнение в виде $|x^2 - 6x + 5| + 1 = ax$, нарисуйте графики $y_1 = |x^2 - 6x + 5| + 1$ и $y_2 = ax$. Далее решение аналогично разобранным задачам 23 и 24.

8. При $a < 0$ – решений нет; при $a = 0$ – одно решение $x = 3$; при $a > 0$ – два решения $x_1 = 3 + a$, $x_2 = 3 - a$. ***Указание.*** Поскольку $|3 - x| = |x - 3|$, то переписав исходное уравнение в виде $|x - 3| = a$ и нарисовав графики $y_1 = |x - 3|$ и $y_2 = a$, легко получите ответ.

9. При $a<-8$ – один корень $x_1=-\sqrt{-a-7}$; при $a=-8$ – два корня $x_1=1, x_2=-1$; при $-8<a<-7$ – три корня $x_1=-\sqrt{-a-7}$, $x_2=\sqrt{-a-7}$, $x_3=\sqrt{a+9}$; при $a=-7$ – два корня $x_1=0, x_2=\sqrt{2}$; при $a>-7$ – один корень $x_3=\sqrt{a+9}$. ***Указание.*** Представьте уравнение в виде $|x-1|(x+1)=a+8$. Нарисуйте графики $y_1=|x-1|\cdot(x+1)$ и $y_2=a+8$ и найдите точки пересечения этих графиков.

10. При $a\in(-\infty;-3]\cup[4;+\infty)$ – одно решение $x=\frac{1}{3-a}$; при $a\in(-3;3)$ – два решения $x_1=\frac{1}{3-a}$ и $x_2=-\frac{7}{3+a}$; при $a\in[3;4)$ – одно решение $x=-\frac{7}{3+a}$.

11. При $a\in(-\infty;\frac{2}{3})$ – решений нет; при $a=\frac{2}{3}$ – одно решение $x=-4$; при $a\in(\frac{2}{3};1)$ – два решения $x_1=\frac{2-a}{a-1}$; $x_2=-\frac{a+6}{a+1}$; при $a=1$ – одно решение $x=-3{,}5$; при $a\in(1;+\infty)$ – одно решение $x=-\frac{a+6}{a+1}$. ***Указание.*** См. решение разобранной в этой главе задачи 34.

12. При $a\in(-\infty;-3-\sqrt{5}\,]$ решения – $x_{1,2}=(a+3)\pm\sqrt{a^2+6a+4}$; при $a\in(-3-\sqrt{5};0)$ – решений нет; при $a=0$ решения – $x_1=1$, $x_2=5$; при $a\in\left(0;3-\sqrt{5}\right]$ решения – $x_{1,2}=(a+3)\pm\sqrt{a^2+6a+4}$, $x_{3,4}=(3-a)\pm\sqrt{a^2+6a+4}$; при $a\in(3-\sqrt{5};+\infty)$ решения – $x_{1,2}=(a+3)\pm\sqrt{a^2+6a+4}$.

13. При $a\in(-\infty;-\frac{9}{4})\cup(\frac{9}{4};+\infty)$ – решений нет; при $a=-\frac{9}{4}$ – одно решение $x=\frac{1}{2}$; при $a\in(-\frac{9}{4};-\sqrt{2})$ – два решения $x_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{9+4a}}{2}$; при $a\in(\sqrt{2};\frac{9}{4})$ – два решения $x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{9-4a}}{2}$; при $a=\frac{9}{4}$ – одно решение $x=-\frac{1}{2}$; при $a\in[-\sqrt{2};\sqrt{2}\,]$ – два решения $x_1=\frac{-1-\sqrt{9+4a}}{2}$; $x_2=\frac{-1+\sqrt{9-4a}}{2}$. ***Указание.*** Переписав уравнение в виде $2-x^2=|x+a|$, нарисуйте графики $y_1=2-x^2$ и $y_2=|x+a|$ (рис. 16). Если представить, что уголок $y_2=|x+a|$ движется слева направо, то решения появятся в момент касания правой ветви уголка с параболой $y_1=2-x^2$ (точка a_1) и будут до момента касания левой ветви уголка с этой параболой (точка a_2). Найдите точки a_1 и a_2, и затем, в зависимости от того, какая из ветвей уголка (или обе) пересекают параболу y_1, выпишите решения.

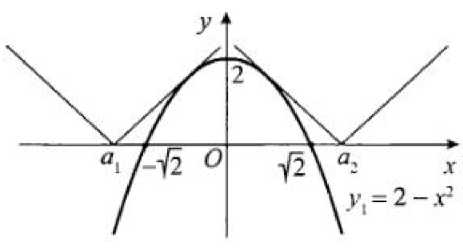


Рис. 16

14. При $a\in(-\infty;0)$ решения – $x\in R$; при $a=0$ решения – $x\in(-\infty;3)\cup(3;+\infty)$; при $a>0$ решения – $x\in(-\infty;3-a)\cup\cup(3+a;+\infty)$.

15. При $a<-8$ решения – $x\in(-\infty;-\sqrt{-a-7})$; при $a=-8$ решения – $x\in(-\infty;-1]$ и $x=1$; при $a\in(-8;-7)$ решения – $x\in(-\infty;-\sqrt{2a-4}\,]\cup[\sqrt{-a-7};\sqrt{a+9}\,]$; при $a\in[-7;+\infty)$ решения – $x\in(-\infty;\sqrt{a+9}\,]$.

16. При $a=0$ решения – две точки $x_1=1, x_2=5$; при $a\in(0;3-\sqrt{5})$ решения – множество $x\in[x_1;x_3]\cup[x_4;x_2]$; при $a\in[3-\sqrt{5};+\infty)$ решения – $x\in[x_1;x_2]$; при $a\in(-\infty;-3-\sqrt{5}\,]$ решения – $x\in[x_1;x_2]$; при $a\in(-3-\sqrt{5};0)$ решений нет. Здесь $x_1=a+3-\sqrt{a^2+6a+4}$, $x_2=a+3+\sqrt{a^2+6a+4}$, $x_3=3-a-\sqrt{a^2+6a+4}$, $x_4=3-a++\sqrt{a^2+6a+4}$. ***Указание.*** Решение аналогично разобранным в этой главе задачам 23–25.

17. При $a\le-1$ решений нет; при $-1<a<1$ решения – $x\in(-\infty;a-\frac{1}{2})$; при $a=1$ решения – $x\in(-\infty;0)$; при $a>1$ решения – $x\in(-\infty;a-\frac{1}{2})$. ***Указание.*** Построив графики функций $y_1=\big|1-|x|\big|$ и $y_2=a-x$, найдите все x, при которых график y_2 находится выше графика y_1.

18. $a\in(-1;\frac{1-\sqrt{7}}{2})\cup(\frac{1+\sqrt{7}}{2};3)$. ***Решение.*** 1) При $a=0$ исходное уравнение имеет вид $|x|=3$. Его корни $x_1=3, x_2=-3$ имеют разные знаки, поэтому $a=0$ не удовлетворяет условию задачи. 2) При $a\neq0$ график функции $y_1=|x-a^2|$ представляет собой уголок. Его вершина $x_в=a^2>0$ находится справа от начала координат. График $y_2=-a^2+2a+3$ при каждом a представляет собой прямую, параллельную оси Ox (рис. 17). а) Чтобы исходное уравнение имело два корня, прямая y_2 должна проходить выше вершины уголка, что будет при выполнении неравенства $-a^2+2a+3>0$. б) А чтобы эти корни были одного знака, прямая y_2 должна пересекать уголок y_1 в точках, абсциссы которых имеют одинаковые знаки (рис. 17). Это будет при выполнении неравенства $y_2(0)<a^2 \Leftrightarrow -a^2+2a+3<a^2$. Решая систему $\begin{cases}-a^2+2a+3>0\\ -a^2+2a+3<a^2\end{cases}$, получаем ответ.

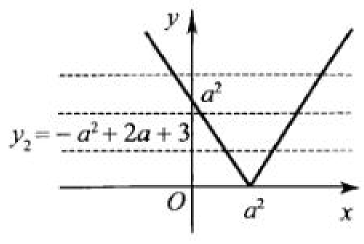


Рис. 17

19. $a=8$, $a=4$. ***Решение.*** Представим данное уравнение в виде $|2x-a|=|x+3|-1$. Правая часть этого уравнения задает неподвижный уголок $y_1=|x+3|-1$, левая – уголок $y_2=|2x-a|$, вершина которого при изменении a движется по оси абсцисс (рис. 18). Очевидно, данное уравнение будет иметь единственное решение, если вершина движущегося уголка попадает в точку A или в

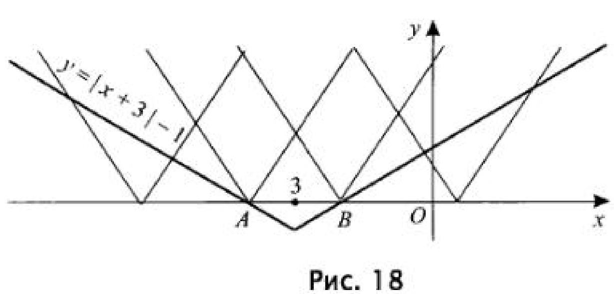


Рис. 18

точку B (рис. 18). A и B – точки пересечения уголка $y_1 = |x+3| - 1$ с осью Ox. Приравнивая $|x+3| - 1 = 0$, находим A (–4; 0), B (–2; 0). Координаты этих точек должны удовлетворять уравнению $y_2 = |2x - a|$. Имеем, $|-8-a| = 0$ или $|-4-a| = 0$. Отсюда получаем ответ $a = -8$ или $a = -4$.

20. $a \in (-1{,}5; -0{,}5) \cup (2; 6{,}5)$.

21. Если $a \in (-\infty; -3] \cup [4; +\infty)$, то $x = \frac{1}{3-a}$; если $a \in (-3; 3)$, то $x_1 = \frac{1}{3-a}$, $x_2 = -\frac{7}{3-a}$; если $a \in [3; 4)$, то $x = -\frac{7}{3+a}$.

22. При $k \in (-\infty; -1) \cup (1; +\infty)$ – одно решение; при $k = 0$ и при $k \in (-1; -\frac{1}{3})$ – два решения; при $k = -\frac{1}{3}$ – три решения; при $k \in (-\frac{1}{3}; 0)$ – четыре решения. ***Указание.*** Нарисуйте графики левой и правой частей уравнения. График левой части представляет собой ломаную, график правой части – семейство прямых, проходящих через точку A (9; 0). После этого исследование числа решений стандартно. См. также решение задачи 19, разобранной в этой главе.

23. $a \in (-\frac{13}{4}; 3)$. ***Решение.*** Перепишем неравенство в виде $3 - x^2 > |x - a|$ и нарисуем графики $y_1 = 3 - x^2$ и $y_2 = |x - a|$. График y_2 представляет собой уголок, правая ветвь которого имеет уравнение $y_2 = x - a$, левая – уравнение $y_2 = a - x$. Решениями нашего неравенства будут значения x, при которых парабола находится выше уголка. Если представить, что уголок движется справа налево вдоль оси Ox, то отрицательные решения у исходного неравенства появятся, когда левая ветвь уголка пройдет под точкой A (0; 3) (рис. 19). Это будет, если $y_2(0) < 3 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow a - 0 < 3 \Leftrightarrow a < 3$. При этом, при движении уголка отрицательные решения у неравенства сохранятся до момента касания правой ветви уголка $y_2 = x - a$ и параболы y_1 (точка B на рис. 19). Приравняв $x - a = 3 - x^2 \Leftrightarrow x^2 + x - (a+3) = 0$, мы получим квадратное уравнение. В случае касания оно имеет единственное решение. Найдя дискриминант и приравняв его к нулю, получим $D = 1^2 + 4(a+3) = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{13}{4}$. Таким образом, решениями будут $-\frac{13}{4} < a < 3$.

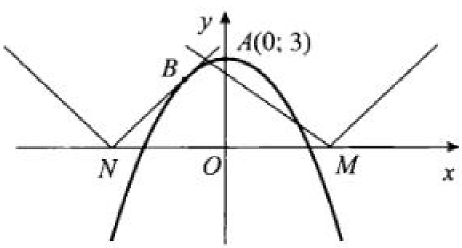


Рис. 19

24. $a \in (-2; -\frac{5}{4}) \cup (-1; -\frac{1}{5})$.

25. $a \in [3; 5)$.

26. $-2 < a < -\frac{4}{5}$. ***Указание.*** Представьте уравнение в виде $|x| + |x+2| = a(x - \frac{1}{2})$. График левой части рисуется стандартно. График правой части представляет собой семейство прямых, проходящих через точку $(\frac{1}{2}; 0)$.

27. $a \in (-\infty; -1)$. ***Указание.*** Представив уравнение в виде $|x+1| - |x| = ax^2$, нарисуйте графики левой и правой частей уравнения. График $y_2 = ax^2$ представляет собой семейство парабол, проходящих через начало координат.

28. $a = -3$, $a = -\frac{1}{27}$. При $a = -3$ решения $-$ $x_1 = -1$, $x_2 = \frac{41}{40}$, $x_2 = \frac{40}{41}$; при $a = -\frac{1}{27}$ решения $-$ $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{1}{3321}$, $x_3 = \frac{1}{3240}$. ***Указание.*** См. решение задачи 30, разобранной в этой главе.

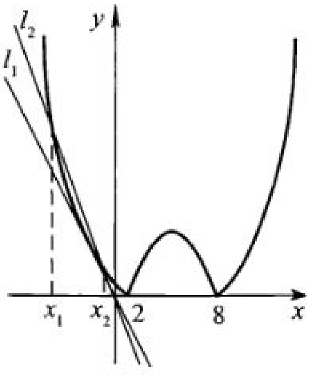


Рис. 20

29. $-4 < a < -3{,}5$. ***Указание.*** См. решение задачи 21.

30. $a \in [\frac{7}{3}; \frac{8}{3}]$. ***Указание.*** См. решение задачи 31.

31. $\frac{10}{3} \le a \le 4$.

32. $0 \le a \le 4$. ***Указание.*** Рассмотрите следующие четыре случая: $a > 2$, $a = 2$, $0 \le a < 2$, $a < 0$. Они определяют принципиально различные случаи расположения графиков y_1 и y_2.

33. При $a \in (-18; 0)$ $-$ решений нет; при $a = -18$ $-$ одно решение $x = -4$; при $a < -18$ $-$ два решения $x_1 = \frac{a+10-\sqrt{a^2+20a+36}}{2}$, $x_2 = \frac{a+10+\sqrt{a^2+20a+36}}{2}$. ***Указание.*** Нарисовать графики $y_1 = |x^2 - 10x + 16|$ и $y_2 = ax$ $(a < 0)$. Показать, что прямая $y_2 = ax$ касается графика y_1 при $a = -18$ (рис. 20, прямая l_1); пересекает график y_1 в двух точках при $a < -18$ (рис. 20, прямая l_2); и не имеет с графиком y_1 общих точек при $18 < a < 0$. См. также решения задач 25 и 26, разобранных в этой главе.

34. При $-18 \le a < 0$ решения $-$ $x \in R$ (рис. 20); при $a < -18$ решения $-$ $x \in (-\infty; x_1] \cup [x_2; +\infty)$, где значения x_1 и x_2 определены в предыдущей задаче.

35. При $a = 2$ решения $-$ $x \in [-4; -3]$; при $a = -2$ решения $-$ $x \in [-3; +\infty)$; при $a \in (-2; 2)$ решения $-$ $x_1 = -3$; $x_2 = \frac{3a+10}{a+2}$; при $a \in (-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ решение $-$ $x = -3$. Уравнение имеет два решения при $a \in (-2; 2)$. ***Указание.*** См. решение задачи 32.

36. При $a \in (-\infty; -\frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{16}; +\infty)$ решения - $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{a-1}{a}$; при $a \in (-\frac{1}{2}; 0)$ решения - $x_1 = 1$, $x_2 = \frac{1+2a\pm\sqrt{1-16a}}{2a}$; при $a = 0$ решения - $x_1 = 1$, $x_2 = 5$; при $a \in (0; \frac{1}{16})$ решения - $x_1 = 2$, $x_2 = \frac{a-1}{a}$, $x_{3,4} = \frac{1+2a\pm\sqrt{1-16a}}{2a}$. При $a = \frac{1}{16}$ решения - $x_1 = -1{,}5$; $x_2 = 1{,}9$.

37. $a = -\frac{1}{2}$. ***Решение.*** Графиком функции $f(x)$ будет ломаная с вершинами $x_1 = a - 1$, $x_2 = -3a$ (рис. 21). Чтобы функция $f(x)$ была четная, ее график должен быть симметричен относительно оси Oy. Следовательно, симметричными должны быть и вершины A и B. А это будет, если $a - 1 = -(-3a)$. Откуда находим $a = -\frac{1}{2}$. При $a = -\frac{1}{2}$ исходная функция имеет вид: $f(x) = \left|x + \frac{3}{2}\right| + \left|x - \frac{3}{2}\right|$. Очевидно, при любом x имеем $f(-x) = \left|-x + \frac{3}{2}\right| + \left|-x - \frac{3}{2}\right| = \left|x - \frac{3}{2}\right| + \left|x + \frac{3}{2}\right| = f(x)$. Следовательно, $f(x)$ – четная.

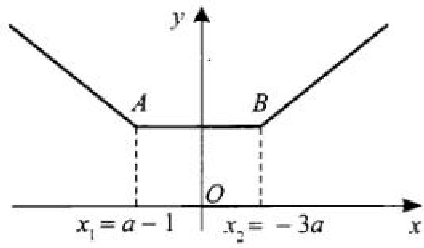


Рис. 21

38. $a \in [2;\ 6]$. ***Решение.*** Поскольку $\sqrt{x-6\sqrt{x-9}} = \sqrt{x-9-6\sqrt{x-9}+9} = \sqrt{\left(\sqrt{x-9}-3\right)^2} = \left|\sqrt{x-9}-3\right|$, то исходное уравнение можно переписать в виде: $\left|\sqrt{x-9}-3\right| + \left|\sqrt{x-9}-5\right| = a$. Обозначим $\sqrt{x-9} = t$. Так как $10 \le x \le 58$, то $1 \le x - 9 \le 49$. Следовательно, $1 \le t = \sqrt{x-9} \le 7$. Итак, нам надо найти все a, при которых корни уравнения $|t-3| + |t-5| = a$ принадлежат отрезку $[1;\ 7]$. Нарисуем графики функций $y_1 = |t-3| + |t-5|$ и $y_2 = a$ (рис. 22). Так как $y_1(1) = 6$ и $y_1(7) = 6$, то точки $A(1;\ 6)$ и $B(7;\ 6)$ находятся на одной высоте и прямая AB параллельна оси Ox (рис. 22). Чтобы корни последнего уравнения принадлежали отрезку $[1;\ 7]$, прямая $y_2 = a$ должна находится между прямой AB и «дном» графика y_1 (рис. 22). А это будет, если $2 \le a \le 6$.

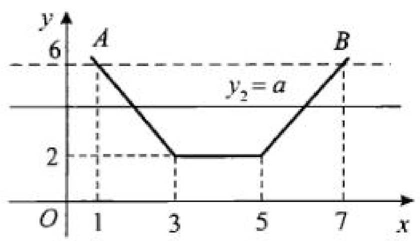


Рис. 22

39. $a \in [-2;\ 1]$. ***Указание.*** Перепишите исходное неравенство в виде $x^2 - |x-1| + 3 \ge |x-a|$ и нарисуйте графики функций $y_1 = x^2 - |x-1| + 3$ и $y_2 = |x-a|$. Затем определите, при каких a график y_1 будет выше графика y_2 при всех x.

40. Наименьшее значение $\frac{1}{5}$ и достигается при $a = \pm\frac{2}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$.

Решение. Раскрыв знаки модуля у функции $y_1 = \big||x+2| - 2\big|$, получаем: x, при $x \ge 0$; $-x$, при $-2 \le x \le 0$; $y_1 = x + 4$, при $-4 \le x \le -2$; $-x - 4$, при $x \le -4$. График функции y_1 представлен на рис. 23. Прямая $y_2 = -ax - 2a - b$ должна иметь с ломанной y_1 ровно три общих точки. Так как ломаная y_1 состоит из четырех звеньев, то прямая y_2 должна проходить через некоторую точку, принадлежащую сразу двум звеньям, т. е. через вершину ломаной. Таких вершин у ломаной три: $A(0;\ 0)$, $B(-2;\ 2)$ и $C(-4;\ 0)$. Следовательно, возможны три случая: 1) искомая прямая проходит через вершину A; 2) через вершину B; 3) через вершину C. Среди этих прямых мы и должны найти ту, которая минимизирует величину $t = a^2 + (b+1)^2$. Если наша прямая проходит через вершину $A\ (0;\ 0)$, то подставив координаты A в уравнение $y_2 = -ax - 2a - b$, получаем $0 = -2a - b$. Тогда

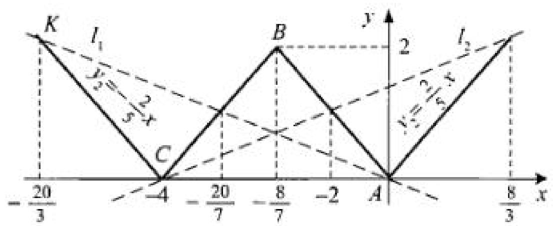


Рис. 23

$b = -2a$. Подставляя теперь $b = -2a$ в выражение $t = a^2 + (b + 1)^2$, получаем $t = 5a^2 - 4a + 1$. Этот трехчлен достигает своего наименьшего значения в вершине $a = \frac{2}{5}$. Само наименьшее значение в этом случае $t_{наим} = t\left(\frac{2}{5}\right)=5\left(\frac{2}{5}\right)^2-4\left(\frac{2}{5}\right)+1=\frac{1}{5}$. Поскольку $b = -2a$, то $b = -\frac{4}{5}$, и уравнение прямой $y_2 = -ax -2a - b$ имеет вид $y_2 = -\frac{2}{5}x$ (прямая l_1 на рис. 23). Подставляя найденные значения a и b в исходное уравнение, получаем $||x+2|-2|+\frac{2}{5}x=0$. Это уравнение имеет ровно три решения: $x_1 = 0$, $x_2 = -\frac{20}{7}$, $x_3 = -\frac{20}{3}$. Таким образом, если прямая $y_2 = -ax - 2a - b$ проходит через вершину A, то наименьшее значение t равно $\frac{1}{5}$. Прямая $y_2 = -ax - 2a - b$ проходит через вершину $B(-2; 2)$. Подставляя координаты B в уравнение прямой $y_2 = -ax - 2a - b$, имеем $2 = 2a - 2a - b$. Тогда $b = -2$. Подставляя $b = -2$ в $t = a^2 + (b + 1)^2$, получаем $t = a^2 + 1 \geq 1$. Далее случай 2) можно не рассматривать, т. к. наименьшее значение t в этом случае больше $\frac{1}{5}$. Прямая $y_2 = -ax - 2a - b$ проходит через вершину $C(-4; 0)$. В этом случае аналогично находим $a = -\frac{2}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$ и $t_{наим} = \frac{1}{5}$, и уравнение прямой $y_2 = -ax - 2a - b$ имеет вид $y_2 = \frac{2}{5}x+\frac{8}{5}$ (на рис. 28 прямая l_2). Подставляя найденные значения a и b в исходное уравнение, получаем $||x+2|-2|-\frac{2}{5}x-\frac{8}{5}=0$. Это уравнение имеет в точности три корня $x_1 = 4$, $x_2 = -\frac{8}{7}$, $x_3 = \frac{8}{5}$. Таким образом, наименьшее значение равно $\frac{1}{5}$ и достигается в двух случаях: при $a = \frac{2}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$ и $a = -\frac{2}{5}$, $b = -\frac{4}{5}$.

41. $k = -8$; $k \in (-8;-4\sqrt{3})$. ***Указание.*** Представьте уравнение в виде: $|x^2-8x+15|-|x^2-1|=kx-b$. Раскрыв у функции $y_1=|x^2-8x+15|-|x^2-1|$ знаки модуля, получим
$$y_1=\begin{cases}2(x-2)^2+6, & x\in[-1;1]\\ -8x+16, & x\in(-\infty;-1]\cup[1;3]\cup[5;\infty)\\ -2(x-2)^2-6, & x\in[3;5]\end{cases}.$$
График y_1 представлен на рис 24. Он симметричен относительно точки $(2; 0)$. Прямая $y_2 = kx - b$ может пересекаться с прямой $y_1 = -8x + 16$ в одной точке, в бесконечном числе точек, вообще не пересекаться, а с параболой - не более, чем в двух точках. Следовательно, более пяти решений уравнение будет иметь, когда прямая $y_2 = kx - b$ имеет с прямой $y_1 = -8x + 16$ бесконечное число общих точек, т. е. когда они совпадают. А это будет при $k = -8$, $b = -16$. Итак, уравнение имеет более пяти решений при $k = -8$. (Его решения в этом случае - $x\in(-\infty;-1)\cup[1;3]\cup[5;+\infty)$). Ровно пять решений будут только в случае, когда прямая y_2 пересекает обе параболы в двух точках и прямую $y_1 = -8x + 16$ в одной точке. Рассмотрите сначала случай, когда прямая y_2 касается обеих парабол (прямая l_2 на рис. 24). Это будет, если уравнение $kx - b = 2(x - 2)^2 + 6$ имеет один корень на промежутке $[-1; 1]$, а уравнение $kx - b = -2(x - 2)^2 - 6$ имеет

один корень на промежутке [3; 5]. Раскройте скобки и приведите оба уравнения к квадратным. Приравняв дискриминанты полученных уравнений к нулю, вы найдете $k = -4\sqrt{3}$, $b = 2k = -8\sqrt{3}$. Итак, прямая $y_2 = -4\sqrt{3}x + 8\sqrt{3}$, проходящая через точку (2;0), касается обеих парабол (рис. 24, прямая l_2). Если теперь из этого положения поворачивать эту прямую вокруг точки (2; 0) по часовой стрелке до положения $y_1 = -8x + 16$, то все промежуточные прямые будут иметь с графиком y_1 пять общих точек. Таким образом, при $-8 < k < -4\sqrt{3}$ исходное уравнение имеет ровно пять решений. В качестве b при этом можно взять $b = -2k$. При других k ни при каком сдвиге вдоль оси Oy прямая $y_2 = kx - b$ не будет иметь с графиком y_1 более трех общих точек, т. е. для этих значений k *не существует ни одного значения* b, при котором исходное уравнение имеет более трех решений.

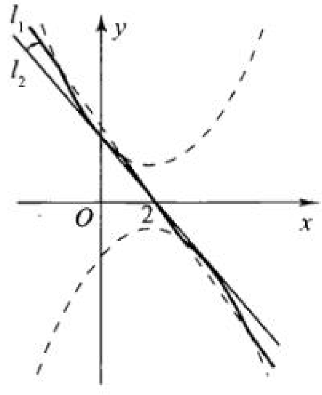


Рис. 24

ГЛАВА 7

1. $a = -7$. **2.** $a = 0$, $a = -2$.

3. $a = \frac{1}{2}$. **4.** $a = -\frac{2}{3}$.

5. $a = -2$. **6.** $a \in (-\infty; -3) \cup (1; +\infty)$.

7. При $a \neq -1$, $a \neq \frac{9}{4}$.

8. При $a = 0$ – решений нет; при $a = 1$ решения – все пары чисел $\begin{cases} x \in R \\ y = 1 - x \end{cases}$; при $a \neq 0$ и $a \neq 1$ решение – пара чисел $x = \frac{a+1}{a}$; $y = -1$. ***Решение.*** Из первого уравнения $y = a - ax$. Подставляя это значение y во второе уравнение системы, получим $(a - a^2)x = 1 - a^2$ (2). Случай 1. $a - a^2 = 0$, т. е. $a = 0$ или $a = 1$. При $a = 0$ уравнение (2) решений не имеет. При $a = 1$ уравнение имеет бесконечное число решений, следовательно, и система имеет бесконечное число решений. Для нахождения этих решений подставим $a = 1$ в исходную систему, получим $\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 1 \end{cases}$. Решением последней системы будут пары $\begin{cases} x \in R \\ y = 1 - x \end{cases}$. Случай 2. $a \neq 0$ и $a \neq 1$. Тогда из уравнения (2) находим $x = \frac{1 - a^2}{a - a^2} = \frac{1 + a}{a}$. Подставляя это значение x в выражение $y = a - ax$, получаем $y = -1$.

9. При $a = -2$ решений нет; при $a = 3$ решения – пары чисел $\begin{cases} x \in R \\ y = \frac{5x - 1}{9} \end{cases}$; при $a \neq -2$, $a \neq 3$ решение – пара чисел $x = \frac{a-2}{a+2}$, $y = 0$.

10. $b \in (-\infty; 0) \cup (0; +\infty)$. ***Указание.*** Найти все b, при которых уравнение имеет одно решение, и те b, при которых бесконечно много решений. Объединение этих множеств и будет ответом задачи.

11. 1) $a=-2$; $b=-6$; 2) $a=6$; $b=2$.

12. $c=-1$, $d=\frac{8}{3}$. ***Указание.*** Подставьте $x=-1$; $y=2$ в исходную систему и из полученных равенств найдите c и d. При найденных c и d исследуйте число решений исходной системы.

13. При $a=-2$ одно решение $x=-1$; $y=2$; при $a\neq-2$ – решений нет.

14. $b\in\left(-\infty;\ -\frac{2}{3}\right)$.

15. При $a\neq0$ и $a\neq\frac{1}{2}$ прямые пересекаются в одной точке; при $a=-2$ и $a=\frac{1}{2}$ прямые не имеют общих точек; не существует a, при которых прямые совпадают. ***Указание.*** Исследуйте систему уравнений $\begin{cases}3x+2ay=1\\3(a-1)x-ay=1\end{cases}$. Прямые имеют одну общую точку, если эта система имеет одно решение; прямые не имеют общих точек, если эта система не имеет решений; прямые совпадают, если система имеет бесконечное число решений.

16. $c=-\frac{2}{3}$, $d=-1$. ***Указание.*** Найдите в общем виде решение первой системы и подставьте его во второе уравнение. Из полученных равенств найдите c и d. Найденные значения c и d необходимо проверить. Подставив их в исходные системы, выясните, совпадают ли их решения.

17. $b=-\frac{9}{4}$. ***Указание.*** См. решение разобранной в этой главе задачи 8.

18. $a\in[-1;0)$. ***Указание.*** См. решение задачи 10.

19. При $a=0$, $b\neq1$ – решений нет; при $a=0$, $b=1$ решения – $x=-2z-1$, $y=z+1$, $z\in R$; при $a\neq0$, $b\in R$ решение - тройка чисел $x=\frac{2-a-2b}{a}$, $y=\frac{b+a-1}{a}$, $z=\frac{b-1}{a}$. ***Решение***. Подставив $x=-y-z$ во второе и третье уравнения, получаем $\begin{cases}y-z=1\\y+(a-1)z=b\end{cases}$. Подставив теперь $y=z+1$ в третье уравнение, получаем линейное уравнение $az=b-1$. 1) При $a=0$, $b\neq1$ оно не имеет решений. 2) При $a=0$, $b=1$ его решения - $z\in R$. Найдем при этих a и b решения исходной системы. Имеем $y=z+1$, где $z\in R$. Подставляя $y=z+1$ в равенство $x=-y-z$, получаем $x=-2z-1$. Итак, в случае $a=0$, $b=1$ решения - тройки чисел $\begin{cases}x=-2z-1\\y=z+1\\z\in R.\end{cases}$ 3) При $a\neq0$ из уравнения $az=b-1$ находим $z=\frac{b-1}{a}$ Следовательно, $y=z+1=\frac{b-1}{a}+1=\frac{b+a-1}{a}$ и $x=-y-z=-\frac{b+a-1}{a}-$ $-\frac{b-1}{a}=\frac{2-a-2b}{a}$.

20. $\alpha=\frac{\pi}{3}$ или $\alpha=-\frac{\pi}{3}$.

21. $a\in[2;3]$. ***Указание.*** См. решение задачи 7.

22. $m = 4$ или $m = -4$. ***Указание.*** Если утверждение «при данном значении m система уравнений имеет единственное решение» – является неверным, то верным будет утверждение «при данном m система не имеет единственного решения». А поскольку линейная система может иметь одно решение, бесконечно много решений и не иметь решений, то ясно, что нам подходят те m, при которых система не имеет решений или имеет бесконечно много решений. Итак, задача свелась к стандартной: найти все значения m, при которых линейная система не имеет решений или имеет бесконечно много решений.

ГЛАВА 8

1. $(4; -8)$. **2.** $(2; -1; 1)$. **3.** $(-4; -4)$, $(-6; -2)$.

4. $(1;3)$, $(3;1)$, $(-1;-3)$, $(-3;-1)$. ***Указание.*** Подставьте $y = \frac{3}{x}$ в первое уравнение. В полученном уравнении $x^4 + \frac{81}{x^4} = 82$ обозначьте $x^4 = t$.

5. $(2; 1)$, $(6; -3)$, $(6 + 2\sqrt{3};\ -2 - 2\sqrt{3})$, $(6 - 2\sqrt{3};\ -2 + 2\sqrt{3})$.

6. $(2; 6)$, $(1; 3)$. ***Указание***. Обозначить $\frac{2}{x} = a$, $\frac{y}{3} = b$.

7. $(2; 4)$, $(4; 2)$. ***Указание.*** В первом уравнении представьте $x^2 + y^2 = x^2 + y^2 + 2xy - 2xy = (x + y)^2 - 2xy$. Левую часть второго уравнения приведите к виду $\frac{x+y}{xy} = \frac{3}{4}$. Далее обозначьте $x + y = a$, $xy = b$.

8. $(1; 4)$. ***Указание.*** Обозначьте $\sqrt{\frac{x}{y}} = t$.

9. $(1; 2)$. ***Решение.*** Обозначим $x^2y^3 = a$, $x^3y^2 = b$. Тогда система примет вид: $\begin{cases} a + b = 12 \\ a - b = 4 \end{cases}$. Решая её, находим $a = 8$; $b = 4$. Теперь исходная система равносильна следующей $\begin{cases} x^2y^3 = 8 \\ x^3y^2 = 4 \end{cases}$. Разделив первое уравнение на второе, получим $\frac{y}{x} = 2$. Подставив $y = 2x$ в любое из уравнений системы, найдем ее решения.

10. $(2; -2)$. ***Указание.*** Обозначьте $\sqrt{x^2 + 2y + 1} = t$, $t \ge 0$. Тогда $x^2 + 2y = t^2 - 1$, и первое уравнение системы сводится к квадратному.

11. $(3; 5)$, $(5; 3)$.

12. $(2; 5)$, $(-2; -5)$. ***Указание.*** Данная система однородная. Решение аналогично, разобранной в этой главе, задаче 9.

13. $(3; 2)$, $(-3; -2)$, $\left(\frac{\sqrt{3}}{3}; \frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$, $\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}; -\frac{5\sqrt{3}}{3}\right)$. ***Указание.*** Данная система также однородная.

14. При $a = -3$ одно решение $x = -3$, $y = -2$; при остальных a – решений нет.

15. $a \in [-2; \frac{1}{4}]$.

16. $a \in (-\infty;-1) \cup (1;+\infty)$. ***Решение.*** Перепишем второе уравнение в виде: $y(x-1) = |x+4|$. Значение $x = 1$ не удовлетворяет этому уравнению, поэтому, разделив на $x - 1$, получим равносильное уравнение $y = \frac{|x+4|}{x-1}$. Подставив это значение y в первое уравнение, получим $x^2 - (a+1)x + |x+4|(ax - a + 3) + a = 0$. Система имеет решения, когда последнее уравнение имеет корни, отличные от $x = 1$. Раскроем знак модуля. Случай 1. $x \geq -4$. Тогда уравнение примет вид $(a + 1)x^2 + 2(a + 1)x - 3a + 12 = 0$. При $a = -1$ это уравнение корней не имеет. При $a \neq -1$ оно будет иметь корни, если его дискриминант $D = 16a^2 - 28a - 44 \geq 0$. Это будет при $a \in (-\infty;-1) \cup [\frac{11}{4};+\infty)$. Поскольку вершина параболы $y = (a + 1)x^2 + 2(a + 1)x - 3a + 12 - 5a$ находится в точке $x_a = -1$, то один из корней всегда находится правее точки $x = -4$, и следовательно, в случае 1 одно решение всегда есть. Аналогично исследуйте второй случай $x < -4$.

17. $a \in [0,75;+\infty)$. ***Указание.*** Второе уравнение раскладывается на множители $(x + y + 1)(x - y + a) = 0$. После этого исходная система распадается на две: 1) $\begin{cases} x + y + 1 = 0 \\ x^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x - y + a = 0 \\ x^2 - y + 1 = 0 \end{cases}$. Первая система решений не имеет. В системе 2), подставляя $y = x + a$ во второе уравнение, получаем $x^2 - x + 1 - a = 0$. Последнее уравнение имеет решения, если $D = 4a - 3 \geq 0 \Leftrightarrow a \geq \frac{3}{4}$.

18. При $a = 0, b \neq 0$ – решений нет; при $a \neq 0, b = 0$ – решений нет; при $a = 0, b = 0$ решениями будут $\begin{cases} x \in R \\ y = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} x = 0 \\ y \in R \end{cases}$; при $a \neq 0$, $b \neq 0$ решение - пара чисел $x = \frac{b^8}{a^{11}}$; $y = \frac{a^7}{b^5}$.

19. При $a = 0$ решения - пары $\begin{cases} x \in R \\ y = x \end{cases}$; при $a \neq 0$ решения - пары: 1) $x_1 = 0$, $y_1 = 0$; 2) $x_2 = \frac{3a}{2}$, $y_2 = \frac{9a}{2}$; 3) $x_3 = \frac{3a}{4}$, $y_3 = -\frac{9a}{4}$. ***Указание.*** Представьте систему в виде $\begin{cases} x(y - x) = ay \\ y(y - x) = 9ax \end{cases}$. Разделите первое уравнение на второе (предварительно рассмотрев случаи $a = 0, y = 0, x = 0$, $y - x = 0$). Получим $\frac{x}{y} = \frac{y}{9x} \Leftrightarrow y^2 = 9x^2$. Откуда $y = 3x$ или $y = -3x$. Подставьте найденные значения y в любое уравнение исходной системы.

20. $a \in (1;3) \cup (4;6] \cup \{-1\}$. ***Указание.*** Решите первое уравнение. Его корни $x = -1$ и $1 \leq x \leq 4$. Корнями второго уравнения будут $x_1 = a$ и $x_2 = a - 2$. Учитывая, что $x_2 < x_1$, рассмотрите случаи, когда ровно один из корней $x_1 = a$ или $x_2 = a - 2$ принадлежит множеству $M = \{-1\} \cup [1; 4]$.

21. $a \in (-\infty;-10] \cup (0,5;+\infty)$.

22. $a \in (-\infty; -5-4\sqrt{2}] \cup (0; +\infty)$. ***Указание.*** Найдите y из второго уравнения и подставьте в первое.

23. $a \in [-\frac{4}{3}; 0) \cup [\frac{3}{4}; +\infty)$. ***Указание.*** ОДЗ $a \neq 0$. Приведя первое уравнение к общему знаменателю, получим множители $(y - x - a)(ay + ax - 1) = 0$. Далее исходная система распадается на две: $\begin{cases} y = x^2 + 1 \\ y - x - a = 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} y = x^2 + 1, \\ ay + ax - 1 = 0 \end{cases}$. Первая из них имеет решения при $a \in [\frac{3}{4}; +\infty)$, вторая – при $a \in [-\frac{4}{3}; 0)$.

24. При $a = -\frac{17}{48}$ решение - тройка чисел $(\frac{1}{3}; \frac{1}{24}; -\frac{37}{144})$. ***Указание.*** См. решение задачи 21.

25. $m = 1$. Решениями будут

$\begin{cases} x_1 = \frac{1+2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3} \\ y_1 = \frac{5+4\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x_2 = \frac{1+2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3} \\ y_2 = \frac{5+4\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x_3 = \frac{1-2\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3} \\ y_3 = \frac{5-4\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3} \end{cases}$; $\begin{cases} x_4 = \frac{1-2\sqrt{2}-\sqrt{3}}{3} \\ y_4 = \frac{5-4\sqrt{2}+\sqrt{3}}{3} \end{cases}$. ***Указание.*** Приведите оба уравнения системы к виду: $\begin{cases} (x+y)^2 - 4(x+y) + 4m^2 - 8 = 0 \\ (2x-y)^2 + 2(2x-y) + 2 - 2m^2 - 2m = 0 \end{cases}$. Обозначив $x + y = z$, $2x - y = t$, получим систему $\begin{cases} z^2 - 4z + 4m^2 - 8 = 0 \\ t^2 + 2t + 2 - 2m^2 - 2m = 0 \end{cases}$. Чтобы оба уравнения системы имели решения, их дискриминанты должны быть неотрицательны. Решая систему $\begin{cases} D_1 \geq 0 \\ D_2 \geq 0 \end{cases}$, находим единственное целое значение $m = 1$. Подставляя $m = 1$ в исходную систему, легко находим ее решения.

26. $a = 0$. Решим эту задачу «в лоб». Из первого уравнения $y = a - 1 - x$. Подставляя это выражение во второе уравнение, после преобразований получаем квадратное уравнение: $2x^2 + (2 - 2a)x + a + 0{,}5 - 4a^2 = 0$. Чтобы оно имело решения, должно быть $D \geq 0$. Имеем $D = (2-2a)^2 - 4 \cdot 2 \cdot (a + 0{,}5 - 4a^2) = 36a^2 - 16a \geq 0$. Решая это неравенство, получаем $a \in (-\infty; 0) \cup (\frac{4}{9}; +\infty)$. При этих a корни квадратного уравнения есть $x_1 = \frac{2a-2-\sqrt{D}}{4}$, $x_2 = \frac{2a-2+\sqrt{D}}{4}$. Подставляя эти значения x в выражение $y = a - 1 - x$, получаем $y_1 = \frac{2a-2+\sqrt{D}}{4}$, $y_2 = \frac{2a-2-\sqrt{D}}{4}$. Произведение $x_1 \cdot y_1 = \frac{(2a-2)^2 - D}{16} = -2a^2 + 0{,}5a + 0{,}25$. (Произведение $x_2 \cdot y_2$ равно тому же самому). Осталось найти, при каких a квадратный трехчлен $f(a) = -2a^2 + 0{,}5a + 0{,}25$ достигает наибольшего значения на множестве $E = (-\infty; 0) \cup (\frac{4}{9}; +\infty)$. Вершина параболы находится в точке $a_в = \frac{1}{8}$. Но $\frac{1}{8} \notin E$, поэтому наибольшее значение достигается в крайних точках – либо в точке $a = 0$, либо в точке $a=\frac{4}{9}$ (рис. 25). Имеем $f(0) = 0{,}25$, $f(\frac{4}{9})=-2(\frac{4}{9})^2+0{,}5\cdot\frac{4}{9}+0{,}25=\frac{7}{108}$. Поскольку $0{,}25>\frac{7}{108}$, то наибольшее значение xy равно 0,25. ***Замечание.*** Некоторые школьники иногда дают такое «решение». «Поскольку $2xy = (x + y)^2 - (x^2 + y^2)$, то подставляя значения из системы $x + y = a - 1$, $x^2 + y^2 = 5a^2 - 3a + 0{,}5$, получаем $2xy = -4a^2 + a + 0{,}5$. Откуда имеем $xy = -2a^2 + a + 0{,}5$. Его наибольшее значение достигается в вершине $a_в=\frac{1}{8}$ и равно $xy=-2\cdot(\frac{1}{8})^2+\frac{1}{8}+0{,}5=\frac{9}{32}$ ». Это рассуждение содержит ошибку. Дело в том, что при $a=\frac{1}{8}$ исходная система не имеет решений. Поэтому необходимо искать наибольшее значение $xy=-2a^2+a+0{,}5$ на множестве $D\geq 0$.

27. $a = -1$. ***Указание.*** Приведите систему к виду:

$$\begin{cases}6(x+2y)^2+2(3a-2)(x+2y)+3=0\\ 4(x-y)^2-(4a+2)(x-y)+2a^2-2{,}5=0\end{cases}.$$

Обозначьте $x + 2y = z$, $x - y = t$. Система будет иметь решения, если оба дискриминанта полученных квадратных уравнений будут неотрицательны.

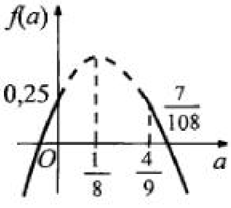


Рис. 25

28. $[-2;\frac{1}{7}]$. ***Решение.*** Разделив первое уравнение на y ($y \neq 0$ по ОДЗ) и вынеся x^2 за скобки, получим равносильную систему $\begin{cases}\frac{(x+y)x^2}{y}=-2a-2a^2\\ x+\frac{x^2}{y}+y=a-1\end{cases}$. Обозначив $x + y = z$, $\frac{x^2}{y}=t$, получим $\begin{cases}zt=-2a-2a^2\\ z+t=a-1\end{cases}$. Выражая z из второго уравнения и подставляя в первое, найдем два решения этой системы $\begin{cases}z_1=2a\\ t_1=-a-1\end{cases}$ и $\begin{cases}z_2=-a-1\\ t_2=2a\end{cases}$. Итак, исходная система равносильна совокупности двух систем: 1) $\begin{cases}x+y=2a\\ \frac{x^2}{y}=-a-1\end{cases}$ и 2) $\begin{cases}x+y=-a-1\\ \frac{x^2}{y}=2a\end{cases}$. В первой системе, выражая y из второго уравнения и подставляя в первое, приходим к квадратному уравнению $x^2-(a+1)x+2a^2+2a=0$. Оно имеет решения, если $D\geq 0$. Имеем $D=(a+1)^2-4(2a^2+2a)=-7a-6a+1\geq 0 \Leftrightarrow a\in[-1;\frac{1}{7}]$. Исследуя аналогично вторую систему, находим, что она имеет решения при $a\in[-2;0]$. Ответом задачи будет объединение этих двух множеств (а не пересечение!).

29. $\begin{cases} a=-4 \\ b\in R \end{cases}$; $\begin{cases} a=4 \\ b=2 \end{cases}$. ***Указание.*** См. задачу 15.

30. $a=0, a=\frac{1}{2\sqrt{3}}, a=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$. ***Решение.*** Преобразуем оба уравнения системы $\begin{cases} ax^2+4ax-y+7a+1=0 \\ ay^2-x-2ay+4a-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ax^2+4ax+4a-y+3a+1=0 \\ ay^2-2ay+a-x+3a-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a(x+2)^2-(y-1)=-3a \\ a(y-1)^2-(x+2)=-3a \end{cases}$

Обозначим $x+2=z$, $y-1=t$, тогда система примет вид: $\begin{cases} az^2-t=-3a \\ at^2-z=-3a \end{cases}$. Вычтя из первого уравнения второе, получим $a(z^2-t^2)+z-t=0$ или $(z-t)(az+at+1)=0$. Таким образом, исходная система равносильна совокупности двух систем: 1) $\begin{cases} z-t=0 \\ at^2-z=-3a \end{cases}$ и 2) $\begin{cases} az+at+1=0 \\ at^2-z=-3a \end{cases}$. Рассмотрим вторую систему. При $a=0$ первое уравнение этой системы решений не имеет. При $a\neq 0$ из первого уравнения находим $z=-\frac{-at-1}{a}$. Подставив это значение во второе уравнение, получим $a^2t^2+at+3a^2+1=0$. Последнее уравнение решений не имеет, т. к. при всех a дискриминант $D<0$. Рассмотрим первую систему. Подставляя $z=t$ во второе уравнение, получаем $at^2-t+3a=0$. При $a=0$ оно имеет единственное решение $t=0$. При $a\neq 0$ оно имеет одно решение, если $D=(-1)^2-12a^2=0$. Откуда находим $a=\frac{1}{2\sqrt{3}}$ или $a=-\frac{1}{2\sqrt{3}}$. Заметим, что эту задачу можно решить, используя симметрию входящих в неё алгебраических выражений. Но этот способ решения будет разобран во 2-й части книги.

31. $a\in(-\infty;-1]\cup[3;+\infty)$. ***Решение.*** Данная система – однородная. Её решение аналогично решению задачи 18, разобранной в этой главе. Обозначим для краткости $c=a^4-4a^3+4a^2-12+\sqrt{105}$. Умножим первое уравнение на c, а второе на 8 и вычтем из второго уравнения первое. Получим $(16-c)x^2+(2c+32)xy+(3c+40)y^2=0$. (3). Данное уравнение вместе с первым уравнением исходной системы образует систему, равносильную исходной. Из первого уравнения исходной системы следует, что $x\neq 0$. (При $x=0$ оно принимает вид $-3y^2=8$.) Поэтому, разделив уравнение (3) на x^2 и обозначив $\frac{y}{x}=t$, получим равносильное уравнение: $(3c+40)t^2+$ $+(2c+32)t+16-c=0$ (4). Оно имеет решения, если $D\geq 0$. Решая неравенство $D=(2c+32)^4-4(3c+40)(16-c)\geq 0$, находим $c\in(-\infty;-3-\sqrt{105}]\cup[-3+\sqrt{105};+\infty)$. Согласно второму уравнению $c=2x^2+4xy+5y^2=2(x+y)^2+y^2\geq 0$. Поэтому заключаем $c\geq -3+\sqrt{105}$. Итак, при $c\geq -3+\sqrt{105}$ существует отношение $\frac{y}{x}=t$. Но система может не иметь решений. Надо еще подставить $y=tx$ в первое уравнение системы. Имеем $x^2-2x^2t-3x^2t^2=0\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x^2(1-2t-3t^2)=8$. Чтобы это уравнение имело решения должно быть $1-2t-3t^2\geq 0\Leftrightarrow t\in[-1;\frac{1}{3}]$. Итак, исходная система будет иметь решения, если уравнение (4) будет иметь хотя бы один корень в промежутке $[-1;\frac{1}{3}]$. Это уже стандартная задача. Заметим, что при $c \geq -3+\sqrt{105}$ коэффициент при t^2 – положителен. Рассмотрев теперь три случая: оба корня находятся в этом промежутке, только больший корень и только меньший, найдем, что при $c \geq -3+\sqrt{105}$ оба корня t_1 и t_2 находятся в промежутке $[-1;\frac{1}{3}]$. Осталось решить неравенство $c = a^4-4a^3+4a^2-12+\sqrt{105} \geq \sqrt{105}-3 \Leftrightarrow a^2(a-2)^2 \geq 9 \Leftrightarrow a(a-2) \leq -3$ или $a(a-2) \geq 3 \Leftrightarrow a \leq -1$ или $a \geq 3$.

32. 1) При $a = 8{,}4$ – одно решение. 2) При $a > 8{,}4$ – два решения. 3) При $a < 8{,}4$ – нет решений. ***Указание.*** Решение аналогично решению разобранной в этой главе задаче 26. Эту задачу можно решить и чисто аналитически. Найти y из второго уравнения и подставить в первое. Далее исследовать в зависимости от a число решений, полученного квадратного уравнения.

33. При $a = 1$ и $a = \sqrt{2}$ – четыре решения; при $1 < a < \sqrt{2}$ – восемь решений; при остальных a – решений нет.

34. $a = 2{,}5$. ***Указание.*** См. задачу 27.

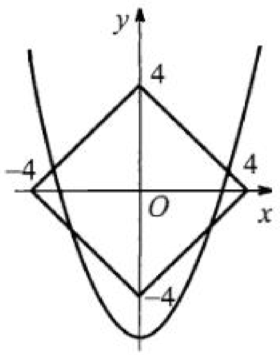


Рис. 26

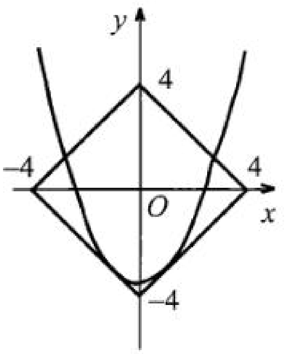


Рис. 27

35. $a \in (16;64)$ и $a = 15$. ***Указание.*** Первое уравнение определяет на плоскости квадрат, второе – параболу $y = x^2 - \frac{a}{4}$. Четыре решения система будет иметь в двух случаях, изображенных на рис. 26 и 27. В первом случае парабола пересекает все четыре стороны квадрата. Это имеет место, если

$$\begin{cases} y(0) = 0^2 - \frac{a}{4} < -4 \\ y(4) = 4^2 - \frac{a}{4} > 0 \\ y(-4) = (-4)^2 - \frac{a}{4} > 0 \end{cases} \Leftrightarrow a \in (16;64).$$

Во втором случае парабола касается сторон AD и CD и пересекает стороны AB и BC (рис. 27). Сторона CD имеет уравнение $x - y = 4$. Парабола касается этой прямой, если уравнение $x^2 - \frac{a}{4} = x - 4$ имеет одно решение. Приравняв к нулю дискриминант этого уравнения, находим $a = 15$.

36. $a = 1$. ***Решение.*** Представим первое неравенство в виде $x^2 + (y+1)^2 \leq 2$. Оно задает на плоскости круг радиуса $\sqrt{2}$ с центром в точке $(0; -1)$. Второе неравенство $y \geq -x - a$ задает полуплоскость, ограниченную прямой $y = -x + a$ (рис. 28). Система имеет единственное решение, если круг и полуплоскость имеют одну общую точку. Это будет только в случае касания прямой $y = -x + a$ и окружности $x^2 + (y+1)^2 = 2$

(рис. 28). Последнее имеет место, если система $\begin{cases} x^2+(y+1)^2=2 \\ y=-x+a \end{cases}$ имеет единственное решение. Подставив $y=-x+a$ в первое уравнение, приходим к квадратному уравнению $2x^2-(2a+2)x+a^2+2a-1=0$. Приравнивая его дискриминант к нулю, находим $a_1=1, a_2=-3$. Нам подходит только $a=1$ (рис. 28, прямая l_1). При $a=-3$ прямая $y=-x+a$ касается окружности снизу (рис. 28, прямая l_2) и нам этот случай не подходит, поскольку тогда исходная система имеет бесконечное число решений.

37. $a=0$, $a=\frac{2}{3}$. ***Указание.*** См. решение задачи 32.

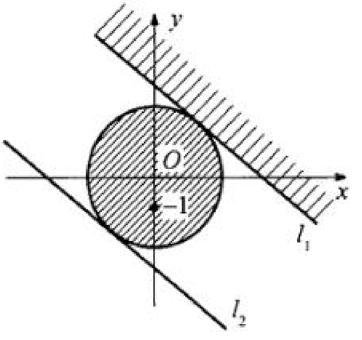


Рис. 28

38. $a\in(-\frac{5}{4};\frac{1}{4})$.

39. $a\in(-10;-2)$. ***Указание.*** См. решение задачи 34.

40. $a\in(-\infty;-2]\cup[-\frac{1}{2};0]$.

41. $a\in[-6;\ 1-\sqrt{13}]\cup[\sqrt{13}-1;\ 6]$. ***Решение.*** Построим множество точек, удовлетворяющих неравенству исходной системы. Для построения можно рассмотреть четыре случая и раскрыть оба модуля. Но проще увидеть, что если $(x;\ y)$ – решение неравенства $x^2+y^2-6|x|-6|y|+17\le 0$, то и $(x;\ -y)$, $(-x;\ y)$ и $(-x;\ -y)$ также решения этого неравенства. Поэтому множество точек T, координаты которых удовлетворяют данному неравенству, симметрично относительно обеих осей Ox и Oy. Следовательно, достаточно рассмотреть только случай $x\ge 0$, $y\ge 0$. При этих x, y неравенство принимает вид: $x^2+y^2-6x-6y+17\le 0 \Leftrightarrow (x-3)^2+(y-3)^2\le 1$. Последнее неравенство задает на плоскости круг радиуса $R=1$ с центром в точке $(3;\ 3)$. Все множество T состоит из четырех кругов и изображено на рис. 29. Уравнение исходной системы перепишем в виде $x^2+(y-1)^2=a^2$. Оно задает на плоскости окружность радиуса $|a|$ с центром в точке $A(0;\ 1)$. Система будет иметь решения, если эта окружность будет пересекать множество T. Найдем расстояние от центра круга A до центра O_1 – ближайшего к ней круга из множества T.

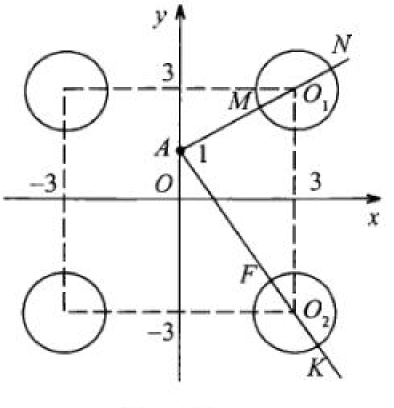


Рис. 29

Имеем $AO_1=\sqrt{(3-0)^2+(3-1)^2}=\sqrt{13}$. Учитывая, что $O_1M=O_1N=1$, получаем, что окружность $x^2+(y-1)^2=a^2$ будет пересекать ближайший круг, если ее радиус $|a|$ находится в пределах $\sqrt{13}-1\le|a|\le\sqrt{13}+1$. Найдем расстояние от центра A до центра дальнего круга O_2. Имеем $AO_2=\sqrt{(3-0)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{3^2+4^2}=5$. Учитывая, что $O_2K=O_2F=1$ заключаем, что окружность $x^2+(y-1)^2=a^2$ будет пересекать дальний круг, если ее радиус $|a|$ находится в пределах $4\le|a|\le6$. Поскольку $2<\sqrt{13}-1<3$ и $4<\sqrt{13}+1<5$, получаем, что окружность $x^2+(y-1)^2=a^2$ будет пересекать множество T, если ее радиус $|a|$ будет находиться в пределах $\sqrt{13}-1<|a|<6$.

42. $p=6$. ***Указание.*** Из условия задачи следует $p>0$. Раскрыв знаки модуля, нарисуйте фигуру, определяемую заданным в условии неравенством. Покажите, что данная фигура – параллелограмм с координатами вершин $A(\frac{p-3}{3};\frac{p+6}{3})$, $B(\frac{p-3}{3};\frac{6-2p}{3})$, $C(-\frac{p+3}{3};\frac{6-p}{3})$ и $D(-\frac{p+3}{3};\frac{2p+6}{3})$ (рис. 30). Его основание $AB=\frac{p+6}{3}-\frac{6-2p}{3}=p$. Его высота $MN=\frac{p-3}{3}-(-\frac{p+3}{3})=\frac{2}{3}p$. По условию $S_{\text{пар}}=24$. Следовательно, $p\cdot\frac{2}{3}p=24\Leftrightarrow p^2=36\Leftrightarrow p=6$.

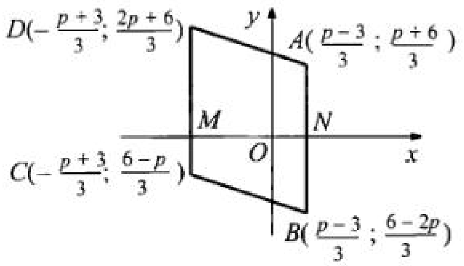


Рис. 30

43. $p\in(\frac{1}{\sqrt[4]{2}};1]\cup\left\{\sqrt[4]{p}\right\}$ ***Решение.*** Из первого уравнения следует $|x|+|y|=p$, либо $|x|+|y|+|x+y|=2p$. При $p<0$ ни одно из этих уравнений решений не имеет. При $p=0$ решениями обоих уравнений будет одна точка (0; 0). Рассмотрим случай $p>0$. Тогда уравнение $|x|+|y|=p$ задает на плоскости xOy квадрат $ACDF$ (рис. 31). Если раскрыть модули в уравнении $|x|+|y|+|x+y|=2p$, мы увидим, что оно задает шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 31). Объединение квадрата и шестиугольника представляет собой множество, описываемое первым уравнением системы. Это есть ломаная линия, состоящая из 8 отрезков AB, BC, CD, DE, EF, FA, AC и FD. Второе уравнение исходной системы задает окружность радиуса $\frac{1}{p}$. Нам надо найти такие p, при которых окружность и ломаная будут иметь ровно 4 общие точки. Это будет в двух случаях. Когда окружность касается сторон квадрата $ACDF$. Из второго уравнения радиус этой окружности равен $\frac{1}{p}$. С другой стороны, радиус этой окружности равен высоте в треугольнике OFD, опущенной на сторону DF. Легко подсчитать, что она равна $\frac{p\sqrt{2}}{2}$. Приравнивая $\frac{p\sqrt{2}}{2}=\frac{1}{p}$, находим $p=\sqrt[4]{2}$. Когда окружность пересекает отрезки AB, BC, DE и EF. Это будет, если радиус окружности $\frac{1}{p}$ будет больше или равен длине отрезка $OA=p$ и меньше длины отрезка $OB=p\sqrt{2}$. Имеем, $p\le\frac{1}{p}<p\sqrt{2}\Leftrightarrow p\in(\frac{1}{\sqrt[4]{2}};1]$.

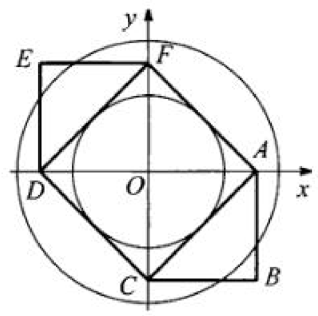


Рис. 31

44. $p = 2$, $3\sqrt{13} - 2 < |q| < 3\sqrt{13} + 2$. ***Указание.*** См. решение задачи 33.

ГЛАВА 9

1. $a \in (-\infty; -0,5] \cup (\frac{2}{3}; +\infty)$. **2.** $a \in (-\infty; -4] \cup (0,2; +\infty)$.

3. $a \in (-\infty; -1] \cup [0,5; +\infty)$. **4.** $a \in [0; 0,4] \cup \{-0,1\}$.

5. $a \in (-\frac{9}{4}; 2)$. ***Решение.*** Построим графики $y_1 = 2 - x^2$ и $y_2 = |x + a|$. Нам нужно найти значения a, при которых неравенство имеет положительные решения. Если представить, что уголок $y_2 = |x + a|$ движется по оси Ox справа налево, то положительные решения у исходного неравенства появятся после момента касания левой ветви уголка с параболой $y_1 = 2 - x^2$ (уголок u_1 на рис. 32) и будут до тех пор, пока правая ветвь уголка u_2 будет проходить ниже точки $(0; 2)$ (уголок u_2 на рис. 32). Левая ветвь уголка $y_2 = |x + a|$ имеет уравнение $y_2 = -x - a$. Она будет касаться параболы $y_1 = 2 - x^2$, если уравнение $2 - x^2 = -x - a \Leftrightarrow x^2 - x - 2 - a = 0$ будет иметь одно решение. А это будет, когда $D = 9 + 4a = 0$, т.е. $a = -2,25$.
Правая ветвь уголка имеет уравнение $y_2 = x + a$. Она будет проходить через точку $(0; 2)$, если $y_2(0) = 2 \Leftrightarrow 0 + a = 2 \Leftrightarrow a = 2$. Следовательно, искомым множеством будет промежуток $(-2,25; 2)$.

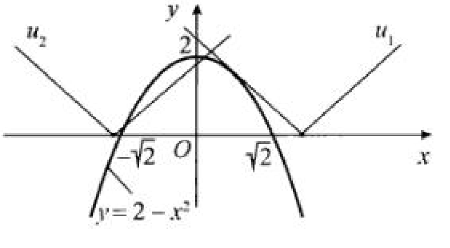


Рис. 32

6. $a \in [-7; 4]$. ***Указание.*** См. решение задачи 13.

7. $p = 7$ или $p = 35$. ***Указание.*** См. решение задачи 9.

8. $p \in (0; \frac{1}{2}) \cup (\frac{1}{2}; 10)$. **9.** $x = 3$. См. решение задачи 8.

10. $x=5$. ***Решение.*** Идея решения задачи, как и трех предыдущих, основана на монотонности функций, но технически она чуть более сложна. Обозначим k_1 – число корней первого уравнения, k_2 – число корней второго уравнения. Тогда по условию задачи $k_1 = k_2 + 7 - p$. 1. Все значения функции $y_1 = 2\cos\frac{\pi x}{x+10}$ заключены в промежутке $[-2; 2]$. Следовательно, график функции y_1 расположен в полосе между прямыми $y=-2$ и $y=2$. 2. График функции $y_2 = (4 + \sqrt{p-7})x - 19$ - прямая с угловым коэффициентом $k = 4 + \sqrt{p-7} > 0$. Так как $k > 0$, то y_2 – возрастающая функция. Учитывая это, и то, что $y_2(0) = -19$ заключаем, что при $x < 0$ второе уравнение решений не имеет. По аналогичной причине, поскольку $y_2(10) = , = (4 + \sqrt{p-7})10 - 19 = 21 + \sqrt{p-7} \geq 21$, то при $x > 10$ оно также не имеет решений. 3. Покажем, что в промежутке $[0; 10]$ второе уравнение имеет одно решение, т. е. $k_2 = 1$. Преобразуем выражение $t = \frac{\pi x}{x+10}$. Имеем, $t = \frac{\pi x}{x+10} = \pi\frac{x+10-10}{x+10} = \pi(1 - \frac{10}{x+10}) = \pi - \frac{10\pi}{x+10}$. Из последнего равенства видно, что в промежутке [0; 10] величина t растет от $t(0)=0$ до $t(10)=\frac{\pi}{2}$. А поскольку функция $\cos t$ в промежутке $[0; \frac{\pi}{2}]$ убывает от 1 до 0, то функция $y_1 = 2\cos\frac{\pi x}{x+10}$ в промежутке [0; 10] убывает от 2 до 0. Функция $y_2 = (4+\sqrt{p-7})x-19$ в промежутке [0; 10] возрастает от $y_2(0) = -19$ до $y_2(10) = 21+\sqrt{p-7} \geq 21$. Нарисовав эскизы убывающей функции $y_1 = 2\cos\frac{\pi x}{x+10}$ и возрастающей $y_2 = (4+\sqrt{p-7})x-19$ (рис. 33), видим, что они пересекаются в одной точке [1]. Таким образом, $k_2 = 1$.

4. Первое уравнение задачи равносильно системе:

$$\begin{cases} x^3+(p+7)x^2+(2p-11)x-6(p+13)=(x+p)(x^2+6x+8) \\ x^2+6x+8 \neq 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-(4p+19)x-2(7p+39)=0 \\ x \neq -2,\ x \neq -4 \end{cases} \quad (4).$$

Так как уравнение в системе (4) – квадратное, то оно имеет не более двух решений, т. е. $k_1 \leq 2$. 5. Рассмотрим отдельно три случая: $k_1 = 0$, $k_1 = 1$ и $k_1 = 2$. Как мы уже говорили, по условию задачи $k_1 = k_2 + + 7 - p$. Подставим последовательно в это соотношение значения $k_1 = 0, 1, 2$ и $k_2 = 1$. а) При $k_1 = 0$, $k_2 = 1$ получаем $p = -8$. Это значение нам не подходит, так как по условию задачи $p \geq -7$. б) При $k_1 = 2$, $k_2 = 1$ получаем $p = -6$. При этом значении p система (5) имеет вид

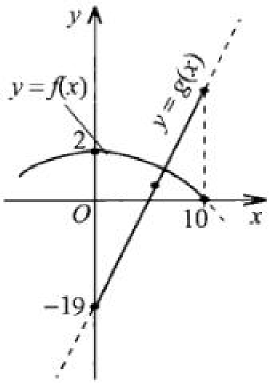


Рис. 33

$$\begin{cases} x^2+5x+6=0 \\ x \neq -2,\ x \neq -4 \end{cases} \quad (5).$$

Квадратное уравнение $x^2+5x+6=0$ имеет два решения $x_1 = -2$, $x_2 = -3$. Но $x_1 = -2$ не удовлетворяет второму условию системы. Следовательно, при $p = -6$ система (5), а следовательно, и первое уравнение исходной задачи, имеют одно решение. А это противоречит тому, что $k_2 = 2$. в) При $k_1 = 1$, $k_2 = 1$ получаем $p = -7$. При $p = -7$ система (5) имеет вид: $\begin{cases} x^2+9x+20=0 \\ x \neq -2,\ x \neq -4 \end{cases}$. Корнями уравнения $x^2+9x+20=0$ будут $x_1 = -4$, $x_2 = -5$. Но второму условию удовлетворяет только $x_2 = -5$. Таким образом, при $p = -7$ система (5) имеет одно решение, т. е. согласуется с условием $k_1 = 1$. Итак, нам подходит только $p = -7$. Осталось при этом значении p найти корень первого уравнения. Подставляя $p = -7$ в это уравнение, получаем $2\cos\frac{7\pi}{3} = 4x-19$. Поскольку $2\cos\frac{7\pi}{3} = 2\cos(2\pi+\frac{\pi}{3}) = 2\cos\frac{\pi}{3} = 1$, то решая уравнение $4x - 19 = 1$, находим $x = 5$.

11. $a \in (-\infty; -1) \cup [0; +\infty)$. ***Решение.*** Формулировка сходна задачам 1–3 этой главы. Условие равносильно следующему: найти все a, при которых система

---

[1] Здесь мы также неявно воспользовались непрерывностью функций y_1 и y_2 на промежутке [0; 10]. См. ссылку к разобранной в этой главе задаче 8.

$\begin{cases}(x-2)(x^2-2x-3)=a(x-\frac{3}{x}-2)\\ 0<x<2\end{cases}$ не имеет решений. Приведем эту систему к виду:

$\begin{cases}(x^2-2x-a)(x^2-2x-3)=0\\ 0<x<2\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x^2-2x=a\\ x\in(0;2)\end{cases}$. Мы отбросили множитель x^2-2x-3, т. к. он обращается в нуль только при $x=-1$, $x=3$, которые не принадлежат промежутку $(0; 2)$. Таким образом, нам осталось найти, при каких a уравнение $x^2-2x=a$ не имеет решений на промежутке $(0; 2)$. Построим графики $y_1=x^2-2x$ и $y_2=a$ и рассмотрим их на промежутке $(0; 2)$ (рис. 34). Область значений y_1 на этом промежутке $[-1;0)$. Следовательно, графики $y_1=x^2-2x$ и $y_2=a$ не пересекаются (а это и означает, что уравнение не имеет решений) при $a\in(-\infty;-1)\cup[0;+\infty)$.

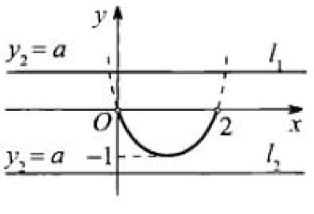


Рис. 34

12. $a\in(-\infty; 0,7]$. ***Указание.*** Приведите неравенство к виду $(x-1)^2-(a+1)|x-1|+a\le 0$. Воспользуйтесь свойством модуля $|c|^2=c^2$. Поэтому $|x-1|^2=(x-1)^2$, и последнее неравенство можно переписать так $|x-1|^2-(a+1)|x-1|+a\le 0$. Обозначьте $|x-1|=t$, тогда наше неравенство примет

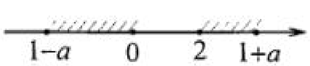


Рис. 35

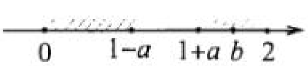


Рис. 36

вид $t^2-(a+1)t+a\le 0$. Корни квадратного трехчлена $t^2-(a+1)t+a$ есть $t_1=1$, $t_2=a$. Поэтому последнее неравенство можно переписать $(t-1)(t-a)\le 0$ (7). Чтобы его решить, рассмотрим три случая: $a>1$, $a=1$, $a<1$. 1. Если $a>1$, то решением неравенства (7) будут $1\le t\le a$ или $1\le |x-1| \le a$. Решив это двойное неравенство, получим $x\in[1-a; 0]\cup[2; 1+a]$ (рис. 35). Это множество не содержит числа $b_1=1{,}7$, поэтому второе условие задачи не выполняется. 2. $a=1$. Тогда неравенство (7) примет вид $(t-1)^2\le 0$. Его решением будет одна точка $t=1$. Опять второе условие не выполняется. 3. $a<1$. Тогда решением неравенства (7) будут $a\le t\le 1$, $a\le |x-1| \le 1$. Рассмотрим два подслучая: а) $a\le 0$. Тогда неравенство $a\le |x-1| \le 1 \Leftrightarrow |x-1| \le 1 \Leftrightarrow x\in[0; 2]$. Этот промежуток содержит $b_1=1{,}7$ и содержит любую бесконечно убывающую прогрессию с $b_1=1{,}7$ и $0<q<1$. Следовательно, $a\le 0$ удовлетворяют условию задачи. б) $0<a<1$. Тогда неравенство $a\le |x-1| \le 1$ имеет решениями $x\in[0; 1-a]\cup[1+a; 2]$ (рис. 36). этом случае $b_1=1{,}7$ будет принадлежать этому множеству решений, если (рис. 36). $1+a\le 1{,}7$, т. е. $0<a\le 0{,}7$. Все эти значения a будут удовлетворять условиям задачи, т. к. при них можно подобрать $0<q<1$ так, что $b_2=b_1q$ будет принадлежать множеству $[0; 1-a]$. Остальные члены этой прогрессии $b_3=b_2q$ и т. д. будут также принадлежать множеству $[0; 1-a]$.

13. $a = 4$. ***Решение.*** Покажем сначала, что $\frac{6}{5}\cos 20^\circ > 1$. Имеем $20^\circ < 30^\circ$ и т. к. функция $\cos x$ убывающая функция, то $\cos 20^\circ > \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Следовательно, $\frac{6}{5}\cos 20^\circ > \frac{6}{5}\cos 30^\circ = \frac{6\sqrt{3}}{10}$, а последнее число больше единицы. Действительно, $\frac{6\sqrt{3}}{10} > 1 \Leftrightarrow (\frac{6\sqrt{3}}{10})^2 > 1^2 \Leftrightarrow \frac{108}{100} > 1$. По свойству показательной функции с основанием больше 1 можем от исходного неравенства перейти к равносильному $x^2 + ax - 12 \le 0$, которое должно выполняться на промежутке $[-6; 2]$. А это будет, если выполняются условия $f(-6) \le 0$ и $f(2) \le 0$, где $f(x) = x^2 + ax - 12$. Имеем $\begin{cases} f(-6) = 36 - 6a - 12 \le 0 \\ f(2) = 4 + 2a - 12 \le 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6a \ge 24 \\ 2a \le 8 \end{cases} \Leftrightarrow a = 4.$

14. $a = 2$. ***Указание.*** Заменив $\cos 2x = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x$, приведём исходное неравенство к виду $\left|-18\sin^2 x - 6(a-2)\sin x + 2a + 5\right| \le 9$. Заменив $t = \sin x$, где $t \in [-1; 1]$, приходим к неравенству $\left|18t^2 + 6(a-2)t - 2a - 5\right| \le 9$, которое равносильно системе $\begin{cases} 18t^2 + 6(a-2)t - 2a - 5 \le 9 \\ 18t^2 + 6(a-2)t - 2a - 5 \ge -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 18t^2 + 6(a-2)t - 2a - 14 \le 0 \\ 18t^2 + 6(a-2)t - 2a + 4 \ge 0 \end{cases}$. Осталось найти a, при которых оба неравенства будут выполняться при всех $t \in [-1; 1]$. Обозначим, $f(t) = 18t^2 + 6(a-2)t - 2a - 14$. Тогда первое неравенство системы выполняется при $t \in [-1; 1]$, если $f(1) \le 0$ и $f(-1) \le 0$. Решив последние два неравенства, находим $a = 2$. При $a = 2$ второе неравенство принимает вид $18t^2 \ge 0$, которое верно при любых t.

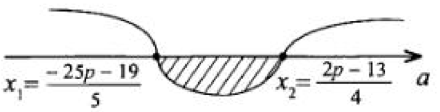


Рис. 37

15. $a \in [-7; 5]$. См. решение задачи 19.

16. $a \in [1; 3]$. **17.** $a = 99$. **18.** $a \in (2; 2\sqrt[4]{90} - 4]$. **19.** $a \in [-1; 2\sqrt[4]{24} - 5)$.

20. $b \in (-\infty; -1 - \frac{1}{2\sqrt{2}}) \cup (-\frac{1}{2}; 0)$.

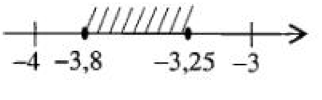


Рис. 38

21. $\frac{1}{25} \le p < \frac{6}{25}$. ***Решение.*** Из уравнения исходной системы следует $\pi x = \pi k$. Тогда $x = k$, $k \in Z$. Следовательно, x – целое число. Решим неравенство исходной системы. Перепишем его в виде $(5x + 25p + 19)(4x - 2p + 13) \le 0$. Отметим на числовой оси точки $x_1 = \frac{-25p-19}{5}$ и $x_2 = \frac{2p-13}{4}$. Покажем, что при $p \ge 0$ выполняется $x_1 < x_2$. Имеем, $\frac{-25p-19}{5} < \frac{2p-13}{4} \Leftrightarrow \frac{110p+11}{20} > 0$. Последнее неравенство верно при всех $p \ge 0$. Итак, $x_1 < x_2$ и решением неравенства будут $\frac{-25p-19}{5} \le x \le \frac{2p-13}{4}$ (рис. 37). При $p = 0$ это будет промежуток $-3{,}8 \le x \le \le -3{,}25$, который не содержит целых точек (рис. 38).

С ростом p значение $x_2 = \frac{2p-13}{4}$ будет увеличиваться, и точка x_2 на оси будет уходить вправо, а значение $x_1 = \frac{-25p-19}{5}$ будет уменьшаться и точка x_1 уходить влево. Следовательно, промежуток $[x_1; x_2]$ будет расширяться, и при некоторых значениях p там появится одна целая точка. Это может быть либо $x = -4$, либо $x = -3$. Первый случай имеет место, когда с ростом p точка x_1 уже находится в промежутке $(-5;-4]$, а точка x_2 всё еще находится в промежутке $(-4;-3)$. Это будет при выполнении неравенств

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-25p-19}{5} \le -4 \\ x_1 = \frac{-25p-19}{5} > -5 \\ x_2 = \frac{2p-13}{4} < -3 \\ p \ge 0 \end{cases}.$$

Решая эту систему, находим $p \in \left[\frac{1}{25}; \frac{6}{25}\right)$. Второй случай имеет место, когда наоборот, точка x_2 попала в промежуток $[-3;-2)$, а точка x_1 еще находится в промежутке $(-4;-3)$. Это будет при выполнении неравенств

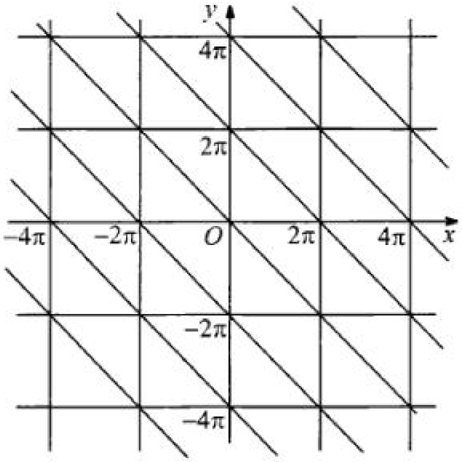


Рис. 39

$$\begin{cases} x_2 = \frac{2p-13}{4} \ge -3 \\ x_2 = \frac{2p-13}{4} < -2 \\ x_1 = \frac{-25p-19}{5} > -4 \\ p \ge 0 \end{cases}.$$ Эта система несовместна.

22. $k = 1$. ***Решение.*** Нарисуем на плоскости xOy множество точек, удовлетворяющих первому и второму уравнениям системы, и найдем, при каких k они не пересекаются. Преобразуем первое уравнение $\sin x + \sin y = \sin(x+y) \Leftrightarrow \sin x + \sin y =$ $= \sin(x+y) \Leftrightarrow 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2} - 2\sin\frac{x+y}{2}\cos\frac{x+y}{2} = 0 \Leftrightarrow 2\sin\frac{x+y}{2}(\cos\frac{x-y}{2} - \cos\frac{x+y}{2}) = 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow 4\sin\frac{x+y}{2}\sin\frac{x}{2}\sin\frac{y}{2} = 0$. Отсюда получаем: 1. $\sin\frac{y}{2} = 0$, $\frac{y}{2} = \pi k$, $y = 2\pi k$, $k \in Z$. Уравнение $y = 2\pi k$, $k \in Z$ задает на плоскости xOy множество прямых, параллельных оси Ox, идущих на расстоянии 2π друг от друга (рис. 39). 2. $\sin\frac{x}{2} = 0$, $\frac{x}{2} = \pi n$, $x = 2\pi n$, $n \in Z$. Уравнение $x = 2\pi n$, $n \in Z$ задает множество прямых, параллельных оси Oy, и также идущих на расстоянии 2π друг от друга. 3. $\sin\frac{x+y}{2} = 0$, тогда $\frac{x+y}{2} = \pi m$, т.е. $y = -x + 2\pi m$, $m \in Z$. Последнее уравнение определяет множество параллельных прямых с угловым коэффициентом $k = -1$ и пересекающих ось Oy в точках $0, 2\pi, 4\pi, \ldots -2\pi, -4\pi\ldots$ Искомое множество (оно представляет объединение этих трех множеств прямых) изображено на рис. 39. Это бесконечная сеть квадратов со стороной, равной 2π и с одной диагональю, которая разбивает эти квадраты на равнобедренные прямоугольные треугольники с катетами, равными 2π. 4. Множество точек, удовлетворяющих уравнению $(x-a)^2+(y-b)^2=$ $=k^2$ ($k>0$), представляет собой окружность радиуса k с центром в точке $M(a;b)$. Поскольку по условию задачи эта окружность не должна иметь общих точек с сетью, следовательно, она должна находиться внутри одного из прямоугольных равнобедренных треугольников сети. А это будет только в случае, когда радиус k этой окружности будет меньше радиуса r окружности, вписанной в равнобедренный прямоугольный треугольник со стороной 2π (рис. 40). Для нахождения r воспользуемся формулой $S=pr$, где S – площадь треугольника, p – полупериметр, r – радиус вписанной окружности. Имеем: $p=\frac{AC+BC+AB}{2}=\frac{2\pi+2\pi+2\pi\sqrt{2}}{2}=2\pi+\pi\sqrt{2}$. $S=\frac{1}{2}2\pi\cdot 2\pi=2\pi^2$. Откуда находим $r=\frac{S}{p}=\frac{2\pi^2}{2\pi+\pi\sqrt{2}}=\frac{2\pi}{2+\sqrt{2}}=\frac{2\pi(2-\sqrt{2})}{(2+\sqrt{2})(2-\sqrt{2})}=$ $=\frac{2\pi(2-\sqrt{2})}{4-2}=\pi(2-\sqrt{2})$. Итак, нам надо найти натуральные числа k, меньшие $\pi(2-\sqrt{2})$. Оценим это число. Так как $3{,}14<\pi<3{,}15$ и $1{,}4<\sqrt{2}<1{,}5$, то легко показать, что $1{,}5<\pi(2-\sqrt{2})<1{,}9$. Следовательно, единственное натуральное число, меньшее $\pi(2-\sqrt{2})$, есть $k=1$.

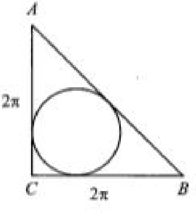


Рис. 40

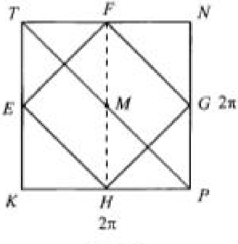


Рис. 41

23. $k=6$. ***Решение.*** Множество точек, удовлетворяющих первому уравнению, как мы выяснили в предыдущей задаче, есть бесконечная сеть квадратов с одной диагональю (рис. 39). При $k<0$ второе уравнение решений не имеет. При $k=0$ ему удовлетворяет только одна пара чисел $x=a$, $y=b$. Поэтому эти случаи нам не подходят. При $k>0$ множество точек, удовлетворяющих второму уравнению, представляет собой квадрат с центром в точке $M(a;b)$ радиуса k. (См. разобранные в главе 8 задачи 22 и 24). Нам нужно найти, при каких k эти квадраты будут иметь с данной сетью две общие точки. Рассмотрим квадрат $EFGH$, вписанный в одну из ячеек сети (рис. 41). Диагональ этого квадрата $FH=2\pi$. Следовательно, $k=FM=\pi$. Теперь ясно, при $0<k<\pi$ квадрат с центром на середине диагонали PT в точке M будет иметь с сетью ровно две общие точки (точки пересечения с диагональю PT). В промежутке $(0;\pi)$ находится три целых числа $k=1$, $k=2$ и $k=3$. Квадраты с центром в точке

M (рис. 41) и радиусами, равными 1, 2 или 3, будут иметь с множеством, определенным первым уравнением, ровно две точки. Сумма $1 + 2 + 3 = 6$ будет ответом задачи.

24. $a \le \frac{57}{32}$.

25. $a \in \left(-\frac{8}{3};-1\right) \cup \left(0;\frac{5}{3}\right)$. ***Указание.*** См. решение задачи 18.

26. $a \in (-\infty;-1) \cup (2;+\infty)$. **27.** $a \in \left(-\infty;-\frac{1}{2}\right) \cup \left(6+2\sqrt{10};+\infty\right)$

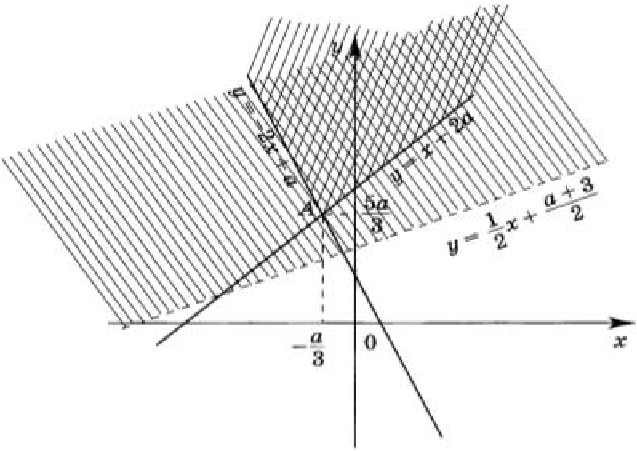


Рис. 42

28. $a > \frac{9}{8}$. ***Указание.*** Постройте множества точек, удовлетворяющих системе $\begin{cases} y \ge a-2x \\ y \ge x+2a \end{cases}$ (рис. 42). Координаты точки пересечения прямых $y = a - 2x$ и $y = x + 2a$ (точка A на рис. 42) определяются из равенства $a - 2x = x + 2a \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x = -\frac{a}{3}$, $y = -\frac{a}{3} + 2a = \frac{5a}{3}$. Чтобы выполнялось условие задачи, прямая $y = \frac{x}{2} + \frac{a+3}{2}$ должна проходить ниже точки A. А это будет при выполнении неравенства $-\frac{a}{6} + \frac{a+3}{2} < \frac{5a}{3} \Leftrightarrow a > \frac{9}{8}$.

Литература

1. Амелькин В.В., Рабцевич В.Л. Задачи с параметрами. Справочное пособие по математике. – Мн.: Асар, 1996 г.
2. Горнштейн П.И., Полонский В.Б., Якир М.С. Задачи с параметрами. – М.: Илекса, 2007 г.
3. Дорофеев Г.В., Потапов М.К., Розов Н.Х. Математика для поступающих в вузы. Пособие. – М.: Дрофа, 2004 г.
4. Козко А.И., Панфёров В.С., Сергеев И.Н. Чирский В.Г. ЕГЭ 2010. Математика. Задача С5. Под ред. Семенова А.Л. и Ященко И.В. – М.: МЦНМО, 2010 г.
5. Козко А.И., Чирский В.Г. Задачи с параметром и другие сложные задачи. – М.: МЦНМО, 2007 г.
6. Натяганов В.Л., Лужина Л.М. Методы решения задач с параметрами: учебное пособие. Изд-во Московского университета, 2003 г.
7. Потапов М.К., Александров В.В., Пасиченко П.И. Алгебра, тригонометрия и элементарные функции. – М.: Высшая школа, 2001 г.
8. Просветов Г.И. Графики функций. – М.: Альфа-пресс, 2010 г.
9. Родионов Е.М. Математика. Решение задач с параметрами. – М.: НЦ ЭНАС, 2006 г.
10. Ткачук В.В. Математика – абитуриенту. – М.: МЦНМО, 2007 г.
11. Моденов В.П. Задачи с параметрами. Координатно-параметрический метод. – М.: Экзамен, 2006 г.

Справочное издание

Виктор Семёнович Высоцкий

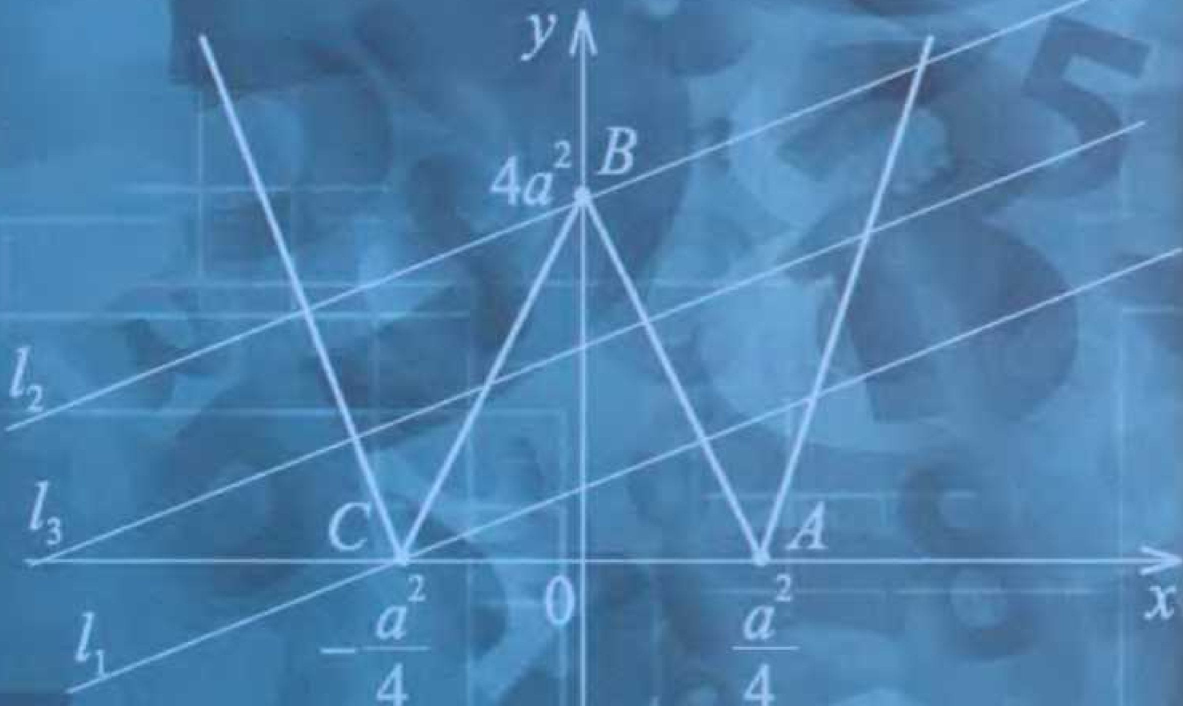
Задачи с параметрами при подготовке к ЕГЭ

Редактор Н.П. Трифонов
Компьютерная верстка В.И. Громыко

«Научный мир»
Тел./факс: +7 (495) 691-2847; +7 (499) 973-2513
E-mail: naumir@benran.ru E-mail: naumir@naumir.ru.
Internet: http://www.naumir.ru

Подписано к печати 04.04.2011
Формат 70×108/16
Гарнитура Таймс. Печать офсетная.
19,75 печ. л.
Тираж 1000 экз. Заказ 131
Издание отпечатано в типографии
ООО «Галлея-Принт»
Москва, ул. 5-я Кабельная, 2-б

y
4
-2
0



y
$4a^2$
B
l_2
l_3
C
A
0
x
l_1
$-\frac{a^2}{4}$
$\frac{a^2}{4}$